

TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a soma

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x, y) dy dx.$$

(a) Expresse a soma das integrais como uma única integral dupla invertendo a ordem de integração.

(b) Calcule I com a função $f(x, y) = \frac{1}{1 + y(3 - y^2)}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio limitado pelos paraboloides definidos por $z = 4 - x^2 - 4y^2$ e $z = 4 - 4x^2 - 16y^2$ e a superfície $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule

$$\iiint_D e^{(x^2+4y^2)^2} dx dy dz.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Seja S a superfície em \mathbb{R}^3 tal que $y^2 + z^2 = 2$ e $-1 \leq x \leq 1$ e

$$F(x, y, z) := (x^2yz + 1, y^2z(1 - x), z - z^2y).$$

Determine $\iint_S F \cdot dA$ em relação com o vetor normal apontando à direção do eixo x .

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja Γ dado por $\gamma(t) := (\cos \theta, \sin \theta, e^\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, e

$$F := \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{1}{z^2} \right).$$

(a) Determine as singularidades de F .

(b) Determine $\text{rot} F$.

(c) Determine $\int_\Gamma F \cdot ds$.