TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule a área da superfície dada pela equação $x = 1 - y^2$ com $0 \leq y \leq 1$, que está entre os planos $z = 0$ e $z = y$.

Solução:

Chamamos S tal superfície. A área de S está dada pela integral

$$A(S) = \iint_S dS.$$

Para calcular a integral, parametrizamos S por

$$\varphi(y, z) = (1 - y^2, y, z), \quad (y, z) \in D,$$

onde $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$. Assim, temos que

$$\iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \times \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z) \right\| dy\, dz.$$

Um cálculo direto mostra que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) = (-2y, 1, 0)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z) = (0, 0, 1)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \times \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z) = (1, 2y, 0)$. Logo, $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z) \times \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z) \right\| = \sqrt{1 + 4y^2}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2} dy dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt{1 + 4y^2} dz \right) dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, y\, dy \\ &= \frac{1}{8}(1 + 4y^2)^{3/2}\Big|_{y=0}^1 \\ &= \frac{5^{3/2} - 1}{12} \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Sejam $P(x, y, z) = -\alpha \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} x \right)$, $Q(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} y x^2$ e $R(x, y, z) = 2z$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\int_C F \cdot dr$ seja independente do caminho de integração, onde $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$.

(b) Calcule $\int_C F \cdot dr$, com o parâmetro α obtido na primeira parte, onde C é uma curva com ponto inicial $A = (0,0,0)$ e ponto final $B = (1,1,1)$.

Solução:

Observemos que, o campo $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é de classe C^1 no aberto $U = \mathbb{R}^3$.

(a) Observe que,

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial 0} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = (1+\alpha)(x^2 + yx).$$

Logo $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \forall (x,y) \in U$

$\Leftrightarrow$

$$(1+\alpha)(x^2 + yx) = 0, \qquad \forall (x,y) \in U.$$

$\Leftrightarrow$

$$1 + \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -1.$$

Para $n = 3$, temos que

$$rot(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \text{ em } U \quad \text{se } \alpha = -1.$$

Como U é aberto e verifica a propriedade poligonal (n = 3), (ou simplimente conexo). Concluimos que, o campo $\mathbf{F}$ é conservativo em U. Pelo Teorema da condição necessaria e suficiente, podemos afirmar que a integral de linha $\int \mathbf{F} \cdot d\,r$ independe do caminho de integração em U.

(b) Pela parte **(a)**, temos $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 y + \frac{y^2}{2}x, \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}yx^2, 2z)$ e pelo Teorema da existência da função potencial, obtemos que, o campo escalar.

$$\psi(x,y,z) = \int_{X_0}^{X} \mathbf{F} \cdot d\,r \tag{1}$$

é a função potencial do campo $\mathbf{F}$, onde $X_0 = (0,0,0)$ e $X \in U$ qualquer. De (1), temos

$$\psi(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\,d\,t + \int_0^y Q(x,t,0)\,d\,t + \int_0^z R(x,y,t)\,d\,t. \tag{2}$$

Observe que, $P(t,0,0)=0$. Logo

$$\int_0^x P(t,0,0)\,dt = 0. \tag{3}$$

Observe que, $Q(x,y,0)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}tx^2$. Logo

$$\int_0^y Q(x,t,0)\,dt = \left[\frac{x^3}{3}t+\frac{1}{4}t^2x^2\right]_0^y = \frac{x^3}{3}y+\frac{1}{4}y^2x^2. \tag{4}$$

Além disso,

$$\int_0^z R(x,y,t)\,dt = z^2. \tag{5}$$

De (1) a (5), obtemos que

$$\psi(x,y,z) = \frac{x^3}{3}y+\frac{1}{4}y^2x^2+z^2, \qquad \forall (x,y,z)\in U. \tag{6}$$

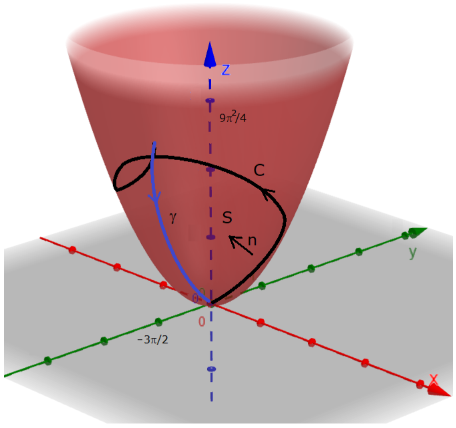
De (6) e o resultado de extensão do TFC na integral de linha, obtemos

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot dr = \int_A^B \nabla\psi\cdot dr = \psi(B)-\psi(A) = \frac{19}{12}.$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C F ds$, onde $F=(yz-y+1, xz+x+1, xy)$ e C é uma curva parametrizada por $\sigma(t)=(t\cos t, t\,\mathrm{sen}t, t^2), 0\le t\le \dfrac{3\pi}{2}$.

Solução:



Vemos que F é de classe C^1 e um cálculo direto mostra que $\text{rot}F = (0,0,2)$.

Note que os pontos (x,y,z) da curva C satisfazem $z = t^2 = t^2\cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t = x^2+y^2$. Ou seja, que C está contida na superfície de equação $z = x^2+y^2$.

Considere, então, a superfície $S : x = r\cos t, y = r\operatorname{sen} t, z = r^2, 0 \le r \le t, 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$, e a curva $\gamma(t) = (0, t, t^2), -\frac{3\pi}{2} \le t \le 0$.

Calculando os vetores tangentes a S temos $\tau_1 = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2r), \tau_2 = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t, 0)$, e orientamos S pelo campo vetorial $n = \frac{N}{\|N\|}$, onde $N = \tau_1 \times \tau_2 = (-2r^2\cos t, -2r^2\operatorname{sen} t, r)$. Desta forma, $\partial S = C \cup \gamma$ e, segundo a orientação das curvas C e γ, ∂S está orientada positivamente em relação à orientação de S. Pelo Teorema de Stokes, temos $\displaystyle\int_C F ds = \int_S \text{rot}F \cdot n dS - \int_\gamma F ds$.

Ou seja, $\displaystyle\int_C \vec{F} d\vec{s} = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_0^t r dr - \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} t^2 dt - \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 dt = \frac{9}{8}\pi^3 - \frac{3}{2}\pi.$

Questão 4: (2.5 pontos)

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$F(x,y,z) = (3x\cos^2 z + 2xz\,,\ \cos(xy) + (1+3y)\sin^2 z\,,\ 1 - z^2)$$

através da superfície S do sólido W definido por

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\},$$

com orientação normal exterior.

Solução:

O fluxo do campo F a través de S está dado pela integral

$$\iint_S F \cdot n dS.$$

Veja que o campo F é de classe C^1 em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ e W é uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$. Além disso, $S = \partial W$ está orientada com vetor normal exterior, ou seja que está orientada positivamente em relação a W. Então, podemos aplicar o teorema de Gauss para concluir que

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_W \operatorname{div} F \, dV. \tag{7}$$

Veja que $\operatorname{div} F = 3\cos^2 z + 2z - x\operatorname{sen}(xy) + 3\operatorname{sin}^2 z - 2z = 3 - x\operatorname{sen}(xy)$. Assim,

$$\iiint_W \operatorname{div} F dV = 3\,Vol(W) - \iiint_W x\operatorname{sen}(xy)\, dV. \tag{8}$$

Notando que $B_3 = W \cup B_1$, onde $B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ é a bola de raio r centrada na origem, e que W intersecta B_1 apenas na sua fronteira, que tem volume nulo, temos que $Vol(B_3) = Vol(W) + Vol(B_1)$, ou seja que $Vol(W) = Vol(B_3) - Vol(B_1) = \frac{4}{3}\pi(3^3 - 1^3) = \frac{104\pi}{3}$.

Agora precisamos calcular $\iiint_W x\operatorname{sen}(xy)dV$. Notando que a função $y \mapsto x\operatorname{sen}(xy)$ é uma função ímpar, e pela simetría do domínio W, concluímos que essa integral é igual a 0. Podemos verificar este fato calculando a integral explícitamente:

Temos que $\iiint_{B_3} x\operatorname{sen}(xy)dV = \iiint_W x\operatorname{sen}(xy)dV + \iiint_{B_1} x\operatorname{sen}(xy)dV$, ou seja que

$$\iiint_W x\operatorname{sen}(xy)dV = \iiint_{B_3} x\operatorname{sen}(xy)dV - \iiint_{B_1} x\operatorname{sen}(xy)dV.$$

Podemos escrever

$$B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D_3,\, -\sqrt{9 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2 - z^2}\},$$

onde $D_3 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 9\}$. Logo,

$$\begin{aligned}\iiint_{B_3} x\operatorname{sen}(xy)dV &= \iint_D \left(\int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} x\operatorname{sen}(xy)dy\right) dxdz \\ &= -\iint_D \Big(\cos(x\sqrt{9 - x^2 - z^2}) - \cos(-x\sqrt{9 - x^2 - z^2})\Big)\, dxdz \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde usamos o fato que cos é uma função par, i.e., $\cos(t) = \cos(-t)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Similarmente, temos que $\iiint_{B_1} x\operatorname{sen}(xy)dV = 0$ e, portanto, $\iiint_W x\operatorname{sen}(xy)dV = 0$. Concluimos, de (7) e (8), que

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_W \operatorname{div} F dV = 104\pi.$$