Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral 3 - MAC238
Gabarito P2 Prova Unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 30/11/2022

TEMPO DE PROVA: 2h00

Questão 1: (2.0 pontos)
Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\int_C F\,dr$ do campo vetorial $F(x,y,z) = (yz, 2xz, xy)$, onde C é a curva dada pela interseção do cilindro $x^2+y^2=16$ com o plano $z=5$, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima.

Resposta. A superfície a ser considerada é o disco limitado pelo círculo resultante da interseção cilindro com o plano. A normal a S é dada $N=(0,0,1)$, cuja norma é 1.
Assim, $dS = \sqrt{2}dxdy$ e $rotF = (-x, 0, z)$, $D = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 16\}$.

$$\int_C F\,dr = \iint_S rotF \cdot n\,dS =$$
$$\iint_D (-x,0,z)\cdot(0,0,1)dxdy =$$
$$\iint_D 5\,dx\,dy.$$

Fazemos uma mudança para coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, com $0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, e temos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 5\,r\,dr\,d\theta = 80\pi.$$

Questão 2: (2.0 pontos)
Seja S o pedaço do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ acima do plano $z=0$ e embaixo do plano $z=1$. Calcule $I = \iint_S (x^2+y^2)dS$.

Resposta. 1. $S:\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D,\ D=\{R^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$.

2. $dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dD = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dD = \sqrt{2}dD.$

3. $\iint_S (x^2+y^2)dS = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dD.$

4. Mudança de variáveis polar: $x=\rho\cos t,\ y=\rho\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 1.$

5. $\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dD = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

Questão 3: (2.0 pontos)
Seja $f(x,y) = xy$ a função definida no disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ e seja S o gráfico da função f. Ache a área de S.

Resposta. Podemos parametrizar S com $\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$. Sua área é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy$$

Usando mudança polar, obtemos

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,r\,drd\theta = \frac{2}{3}\pi(2^{3/2} - 1)$$

Questão 4: (2.0 pontos)
Calcule a integral $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x,y,z) = (2xyz^3 + ye^{xy}, x^2z^3 + xe^{xy}, 3x^2yz^2 + \cos z)$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^5 t, t)$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Resposta. Verificamos que o campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ satisfaz $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = 3x^2z^2$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 6xyz^2$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xz^3 + (1+xy)e^{xy}$. Logo $\operatorname{rot} F = 0$. Como F é de classe C^1, concluímos que F é conservativo.

Calculamos o potencial de F, isto é, vamos determinar uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3 + ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3 + xe^{xy}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2 + \cos z$.

$$f(x,y,z) = \int 2xyz^3 + ye^{xy} = x^2yz^3 + e^{xy} + g(y,z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz^3 + e^{xy} + g(y,z)\right) &= x^2z^3 + xe^{xy} \\
x^2z^3 + xe^{xy} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) &= x^2z^3 + xe^{xy} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) &= 0 \\
g(y,z) &= h(z).
\end{aligned}$$

Segue que $f(x,y,z) = x^2yz^3 + e^{xy} + h(z)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz^3 + e^{xy} + h(z)\right) &= 3x^2yz^2 + \cos z \\
3x^2yz^2 + \frac{\partial h}{\partial z}(z) &= 3x^2yz^2 + \cos z \\
\frac{\partial h}{\partial z}(z) &= \cos z \\
h(z) &= \operatorname{sen} z + k.
\end{aligned}$$

Tomamos $k = 0$ e obtemos que

$$f(x, y, z) = x^2yz^3 + e^{xy} + \operatorname{sen} z$$

Computando o ponto inicial $A = r(0) = (1, 0, 0)$ e final $B = r(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ da curva.

Aplicando o Teorema Fundamental para as integrais de linha temos

$$\int_C F \cdot dr = \int \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A) = 0 + e^0 + 1 - (0 + e^0 + 0) = 1.$$

Questão 5: (2.0 pontos)

Seja $U = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x, y, z)$. Calcule

$$\iint_S U \cdot n \, dS$$

onde S está orientado positivamente e é formado pelo hemisfério superior da esfera de raio 1 e pelo disco unitário centrado na origem no plano $z = 0$:

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, \; z = 0\}.$$

Resposta. Usamos o Teorema da Divergência para concluir que

$$\iint_S U \cdot n \, dS = \iiint_D \operatorname{div} U \, dV,$$

onde $D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; z \geq 0\}$. Temos:

$$\operatorname{div} U = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

Portanto

$$\iint_S U \cdot n \, dS = \iiint_D 5(x^2 + y^2 + z^2) \, dxdydz.$$

Mudando para coordenadas esféricas temos: $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, donde

$$D = \left\{(\rho, \varphi, \theta) \;|\; 0 \leq \rho \leq 1, \, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

O Jacobiano da mudança de coordenadas é

$$dxdydz = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_S U \cdot dS &= \iiint_D 5(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 5\rho^4 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.