TEMPO DE PROVA: 02:00 hrs

Questão 1: (2.0 pontos)

Calcule a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 3xz, 2z^2)$ ao redor da curva C que é a fronteira do triângulo dado no primeiro octante pela interseção do plano $2x + y + z = 1$ com os planos coordenados, com orientação no sentido horário quando visto da origem.

Gabarito. Usaremos o teorema de Stokes. Seja S a porção do plano $2x + y + z = 1$, limitada por C. Parametrizamos a superfície $S : z = 1 - 2x - y, (x, y) \in D$, onde D é a projeção de S sobre o plano xy.

Um vetor normal a S é dado por $N = (2, 1, 1)$ que é compatível com a orientação pedida (apontando para cima). Assim, o vetor unitário normal a S é dado por $\vec{n} = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$ e $dS = \sqrt{6}dxdy$.

Aplica o teorema de Stokes, com $rotF = (-3x, 0, 3z - 2)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_C F\,dr = \int_S rotF\,n\,dS &= \\
\int_D (-3x, 0, 3z-2) \cdot \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}} \sqrt{6}dxdy &= \\
\int_D -12x - 3y + 1\,dx\,dy &= \\
\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} -12x - 3y + 1\,dy\,dx &= \\
\int_0^{\frac{1}{2}} -12xy - \frac{3}{2}y^2 + y]_0^{1-2x}\,dx &= \\
\int_0^{\frac{1}{2}} 18x^2 - 8x - \frac{1}{2}\,dx &= \\
18\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Questão 2: (2.0 pontos)

Calcule a integral $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z^2)$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = \left(\sqrt{t}, t(t-1)^3, e^{\sqrt{t}}\right)$, com $0 \le t \le 1$.

Gabarito: Verificamos que o campo vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ satisfaz $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x \cos y$. Logo $\operatorname{rot} F = 0$. Como F é de classe C^1, concluímos que F é conservativo.

Calculamos o potencial de F, isto é, vamos determinar uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = z^2$.

$$f(x, y, z) = \int e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y + g(y, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \operatorname{sen} y + g(y,z)\right) = e^x \cos y$$
$$e^x \cos y + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = e^x \cos y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0$$
$$g(y,z) = h(z).$$

Segue que $f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y + h(z)$.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^x \operatorname{sen} y + h(z)\right) = z^2$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}(z) = z^2$$
$$h(z) = \frac{z^3}{3} + k.$$

Tomamos $k = 0$ e obtemos que

$$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y + \frac{z^3}{3}$$

Computando o ponto inicial $A = r(0) = (0,0,1)$ e final $B = r(1) = (1,0,e)$ da curva.

Aplicando o Teorema Fundamental para as integrais de linha temos

$$\int_C F \cdot dr = \int \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A) = (0 + \frac{e^3}{3}) - (0 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Calcule $I = \int\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dV$ onde o domínio $V := \{(x,y,z) \in R^3 \mid x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le a\}$ e $a > 0$.

Resolução:

$$I = \int\limits_V z\rho \cdot \rho \quad d\rho dt dz = \int\limits_0^{\pi/2} dt \int\limits_0^{2\cos t} \rho^2 d\rho \int\limits_0^a z dz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} dt \int\limits_0^{2\cos t} \rho^2 d\rho =$$

$$\frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \frac{4}{3}a^2 \Big[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2.$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Considere o campo vetorial dado por $F(x,y) = \left(e^{2\sin(x)-1} + 2y, 4x - \frac{2}{1+(\cos(y))^2}\right)$ e a elipse $\mathfrak{E}$ de equação

$$\mathfrak{E} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Encontre o trabalho realizado pelo campo F sobre uma partícula que se desloca uma vez no sentido anti-horário na elipse $\mathfrak{E}$.

Gabarito. Seja D a região limitada pela elipse $\mathfrak{E}$ e W o trabalho pedido, usando o Teorema de Green obtemos

$$W = \oint_{\mathfrak{E}} F \cdot ds = \int\int_D rot(F) \cdot \overrightarrow{k}\, dA = \int\int_D 2dA = 2Area(D) = 12\pi$$

Questão 5: (2.0 pontos)

Considere a região

$$\mathcal{D}(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{(x-y)^2}{[(t^2+1)]^2} + \frac{(x+y)^2}{e^{2t}} \leq 1\right\}.$$

Seja

$$\mathcal{A}(t) = \int\int_{\mathcal{D}(t)} dxdy,$$

a área de $\mathcal{D}(t)$. Calcule

$$\mathcal{A}(t) \text{ e } \mathcal{A}'(t).$$

Gabarito. Faça a mudança de variáveis

$$u = \frac{x-y}{t^2+1}; \qquad v = \frac{x+y}{e^t}.$$

Então

$$x = \frac{(t^2+1)u + (e^t)v}{2}; \qquad y = \frac{(e^t)v - (t^2+1)u}{2}.$$

O Jacobiano $J = \det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ é

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{t^2+1}{2} & \frac{e^t}{2} \\ -\frac{t^2+1}{2} & \frac{e^t}{2} \end{bmatrix} = \frac{(t^2+1)e^t}{2}.$$

Assim,

$$\mathcal{A}(t) = \int\int_{\mathcal{D}(t)} dxdy = \int\int_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \frac{(t^2+1)e^t}{2}\, dudv = \frac{\pi(t^2+1)e^t}{2}.$$

Portanto

$$\mathcal{A}'(t) = (2te^t + (t^2+1)e^t)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi(t+1)^2e^t}{2}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.