Questão 1. (2,5 p).- Calcule a integral

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$$

na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq x\}$.

Solução :

(0.4 pontos) Fazemos uma mudança para coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.
(0.4 pontos) A região D nas coordenadas (r,θ) é o retângulo

$$D = \{(r,\theta) \mid 2 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

(0.4 pontos) O Jacobiano da mudança de coordenadas é $J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.
(0.4 pontos) $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta}\right) = \arctan(\tan\theta) = \theta$ em $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.
(0.9 pontos) Calculando

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA &= \int_0^{\pi/4}\int_2^3 \arctan(\tan\theta)\, J(r,\theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_2^3 \theta r dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \theta d\theta \int_2^3 r dr \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_2^3 = \frac{\pi^2}{32}\frac{5}{2} = \frac{5\pi^2}{64}.\end{aligned}$$

□

Questão 2. (2,5 p).- Calcule a integral $\iiint_W z^2\, dV$, onde

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 16,\ x^2+y^2+z^2 \geq 4z \ \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\right\}.$$

Solução :

Em coordenadas esféricas (ρ,φ,θ), podemos ver que as inequações que descrevem W são dadas por:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 16 \iff \rho \leq 4 \\ x^2+y^2+z^2 \geq 4z \iff \rho \geq 4\cos(\varphi) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \iff \pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Portanto, W é descrito em coordenadas esféricas por

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2 \text{ e } 4\cos(\varphi) \leq \rho \leq 4.$$

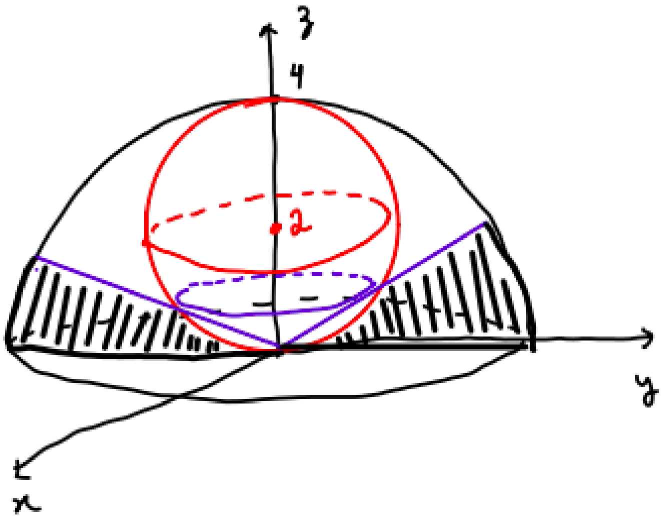

FIGURA 1. *Esboço da interseção de W com o plano yz*

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis na integral tripla, temos que

$$\begin{aligned}\iiint_W z^2\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{4\cos(\varphi)}^{4} \rho^4\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}\,(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \frac{2\cdot 4^5}{5}\pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}(\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}\,(\varphi)-\cos^7(\varphi)\mathrm{sen}\,(\varphi))\,d\varphi \\ &= -\frac{2^{11}}{5}\pi\left(\frac{\cos^3(\varphi)}{3}-\frac{cos^8(\varphi)}{8}\right)\Bigg|_{\varphi=\pi/3}^{\varphi=\pi/2} \\ &= \frac{2^{11}}{5}\pi\left(\frac{1}{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2^{11}}\right) = \pi\left(\frac{2^8}{15}-\frac{1}{5}\right) = \frac{253}{15}\pi\end{aligned}$$

□

Questão 3 (2,5 p).- Considere o campo $\mathbf{F} = (P,Q) = (x^2+x+a^2y^2, y^2+2axy)$ com $a \in \mathbf{R}$. Usando Green, resolva as seguintes questões :

$a)$ Desenhe a região Ω limitada por $2x+y=4$, $x=1$ e $y=0$ e selecione uma parametrização orientada positivamente para seu contorno γ (ou γ orientada anti-horáriamente).

$b)$ Determine os valores do parâmetro a de modo que a integral $\int_\gamma Pdx+Qdy = 0$.

$c)$ Calcule a integral de linha do campo $\mathbf{F}$ para o valor $a=2$.

$$\int_\gamma Pdx+Qdy$$

Solução :

(a) A região Ω é indicada na Figura 2. Uma parametrização positiva é:
Do ponto $B=(1,0)$ ate $C=(2,0)$ $\{(t,0): t\in(1,2)\}$
Do ponto $C=(2,0)$ ate $A=(1,2)$ $\{(1/2(t-4),t): t\in(0,1)\}$
Do ponto $A=(1,2)$ ate $B=(1,0)$ $\{(1,2-t): t\in(0,2)\}$

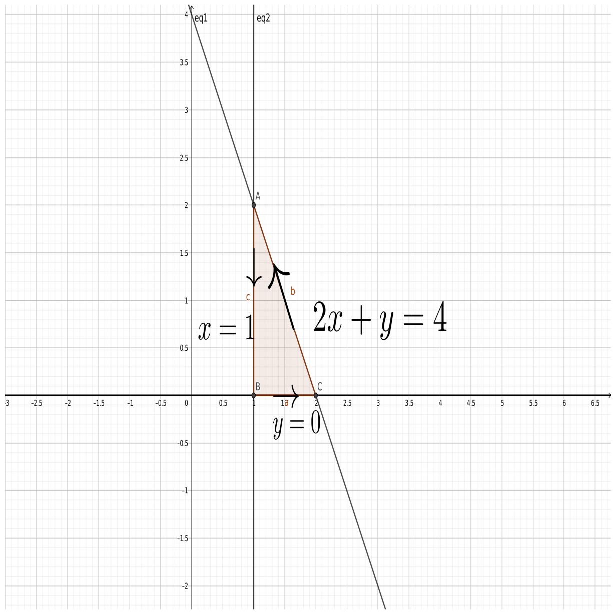

fig:my_label

FIGURA 2. *Curva γ com orientação positiva*

(b) Podemos utilizar o Teorema de Green. Nesse caso,

$$\int_\gamma P dx + Q dy = 2(a - a^2) \iint_\Omega y\, dx\, dy.$$

Como y é positivo na região Ω, temos que $\iint_R y\, dx\, dy > 0$ e, portanto, a integral de linha é zero se, e somente se, $a^2 = a \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 1$.

(c) Note que para $a = 2$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -4y$$

Logo então aplicando o Teorema de Green e o Teorema de Fubini

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_0^2 \int_1^{1/2(4-y)} (-4y) dx dy = -8/3.$$

Questão 4 (2,5 p).- Calcule a integral de superfície de campo vetorial $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde a superfície S é dada pela equação

$$x^2 + y^2 = z^2 \left(1 + 3\left(\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right)^2\right), \quad 1 \le z \le 3,$$

orientada com vetor normal apontando para fora do eixo z e $\mathbf{F}$ é o campo vetorial:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

(**Observação:** S é uma superfície de revolução que contém o cone $x^2 + y^2 = z^2$, $1 \le z \le 3$, em seu interior e coincide com ele nos planos $z = 1$ e $z = 3$)

Solução :

1^a Via de Solução

O campo $\mathbf{F}$ tem singularidade na origem e além disso:

$$\mathrm{Div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Seja S_1 a porção do cone

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Como $z \geq 0$, S_1 está definida por $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, onde D é a região limitada pelas circunferencias $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$. Orientamos S_1 com vetor normal $N_1 = \dfrac{1}{z}(-x,-y,z)$ apontando para cima (para o eixo z). Seja W o sólido entre S e S_1. Tem-se que $S \cup S_1 = \partial W$ está orientada positivamente. O campo vetorial $\mathbf{F}$ é de classe C^1 num aberto contendo W. Usando o teorema de Gauss obtemos:

$$0 = \iiint_W \mathrm{Div}\mathbf{F} \cdot ds = \iint_{S \cup S_1} \mathbf{F} \cdot ds,$$

portanto com $z = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot ds &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot ds \\
&= \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z) \cdot \frac{1}{z}(-x,-y,z)dxdy \\
&= \iint_D \frac{-x^2-y^2+z^2}{z\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2^a Via de Solução

Consideremos as seguintes porções de planos:

$$S_1: \quad z = f(x,y) = 3, \quad (x,y) \in D_1 = \{(x,y); \quad x^2+y^2 \leq 9\},$$

orientada com vetor normal $N_1 = (0,0,1)$ e

$$S_2: \quad z = f(x,y) = 1, \quad (x,y) \in D_2 = \{(x,y); \quad x^2+y^2 \leq 1\},$$

orientada com vetor normal $N_2 = (0,0,-1)$. Seja W o sólido entre S, S_1 e S_2. Tem-se que $S \cup S_1 \cup S_2 = \partial W$ está orientada positivamente. O campo vetorial $\mathbf{F}$ é de classe C^1 num aberto contendo W. Usando o teorema de Gauss obtemos:

$$0 = \iiint_W \mathrm{Div}\mathbf{F} \cdot ds = \iint_{S \cup S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot ds,$$

portanto

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot ds = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot ds - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Calculamos primeiro o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S_1. Usando coordenadas polares (r,θ):

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot ds &= \iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2+3^2)^{3/2}}(x,y,3) \cdot (0,0,1)dxdy \\
&= \iint_{D_1} \frac{3}{(x^2+y^2+9)^{3/2}}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{3r}{(r^2+9)^{3/2}}drd\theta \\
&= \pi(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot ds = \pi(\sqrt{2}-2),$$

portanto

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot ds = 0.$$

□