Questão 1. (2,5 p).- Seja S o pedaço do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ acima do cilíndro $z^2 + x^2 = 1$ e embaixo do cilíndro $z^2 + y^2 = 4$. Calcule a área da superfície S.

Solução :

1. A superfície S (cilindro $z^2 + x^2 = 1$ na cor rose, cilindro $z^2 + y^2 = 4$ na cor azul), ver Fig. 1.

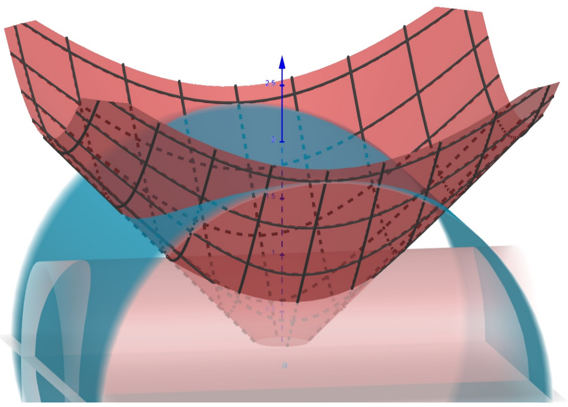

Fig. 1: A superfície S.

2. Interseção Cone x Cilindros, ver Fig. 2:

$z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1$;

$z^2 = x^2 + y^2$, $z^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

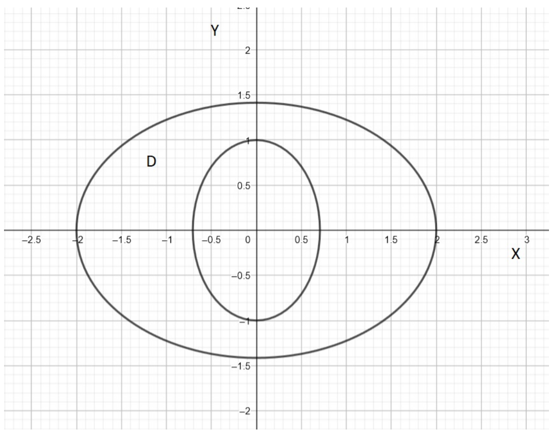

Fig. 2: Projeção D da superfície S.

3. $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dD = \sqrt{2}\, dD$.

4. $A(S) = \sqrt{2} A(D)$.

5. $A(D) = 2\sqrt{2}\pi - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

6. $A(S) = 3\pi$.

$\square$

Questão 2. (2,5 p).- Considere o campo vetorial

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{F}(x, y, z) \;=\; (x-2)\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

Calcule a integral $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ onde o campo $\mathbf{F}$ é definido em (1) e σ é a superfície composta pelo cilíndro $(x-2)^2 + y^2 = 4$, cortado por cima pelo plano $z = \frac{1}{2}(x+4)+6$, e completada por baixo pelo paraboloide $z = (x-2)^2 + y^2$, formando desta maneira, um "copo ", com fundo parabólico e a parte lateral cilíndrica, deixando aberta a parte de cima. Sendo $\mathbf{n}$ apontando para fora do "copo".

Solução :

Pelas coordenadas cilíndricas temos

$$\text{(2)} \qquad \left|\begin{array}{rcl} x &=& 2 + 2\cos u, \\ y &=& 2\,\mathrm{sen}\,u, \\ z &=& v \end{array}\right. \qquad \text{para} \quad 0 \le u \le 2\pi.$$

Uma parametrização do cilíndro, é dado por

$$\text{(3)} \qquad \sigma_1(u, v) \;=\; (2 + 2\cos u, 2\,\mathrm{sen}\,u, v), \;\; \forall\,(u, v) \in K_1 = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

Logo $S \;=\; \sigma_1(K_1) \subset \mathbb{R}^3$.

De (2), temos que

$$z = \frac{1}{2}(x+4) + 6 \;\;\Leftrightarrow\;\; v = 9 + \cos u = v_2.$$

$$z = (x-2)^2 + y^2 \;\;\Leftrightarrow\;\; v = 4 = v_1$$

Logo $v_1 \le v \le v_2$ ....(0,5 p)

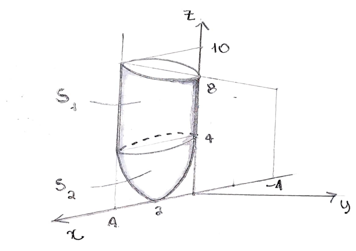

Figura 1. Gráfico da superície não parametrizada

Uma parametrização da superfície lateral S_1, é

$$\text{(4)} \qquad \sigma_1(u, v) \;=\; (2 + 2\cos u, 2\,\mathrm{sen}\,u, v), \;\; \forall\,(u, v) \in D_1 = [0, 2\pi] \times [v_1, v_2].$$

Logo $S_1 \;=\; \sigma_1(D_1) \subset \mathbb{R}^3$. Assim, a normal à superfície, é

$$(5) \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \quad \forall (u,v) \in D_1.$$

Sendo a normal apontado para fora do copo...........(0,3 p)

Por outro lado, uma parametrização do paraboliode, é

$$(6) \qquad \sigma_2(u,v) \;=\; (x, y, (x-2)^2 + y^2), \;\; \forall\, (u,v) \in D_2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4.$$

Logo $\;S_2 \;=\; \sigma_2(D_2) \subset \mathbb{R}^3$. Sendo assim a normal à superfície, é

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y) = -2(x-2)\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x,y) \in D_2.$$

Nesta superfície escolhemos a normal

$$(7) \qquad \mathbf{N}_2(\sigma_2(u,v)) = -\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x,y),$$

que aponta para fora do "copo"............(0,4 p)

Portanto, a superfície σ é uma cadeia de superfícies $S_1 = \sigma_1(D_1)$ e $S_2 = \sigma_2(D_2)$, sendo que

$$\mathbf{n}(\sigma_j(u,v)) \;=\; \mathbf{n}_j(\sigma_j(u,v)), \;\; (u,v) \in D_j \quad j = 1,2.$$

Por definição

$$(8) \qquad \int_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \;=\; \int_{\sigma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_1}\,ds + \int_{\sigma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_2}\,ds, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0,3\,\mathrm{p})$$

onde $\mathbf{n}_1$ é a normal unitária de (5) e $\mathbf{n_2}$ é a normal unitária de (7).

Por definição da integral de superfície, temos

$$(9) \qquad \left|\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\sigma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_1}\,ds &=& \displaystyle\iint_{D_1} \mathbf{F}(\sigma_1(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}\right] du\,dv \\ &=& \displaystyle 4\int_0^{2\pi}\int_4^{9+\cos u} dv\,du \;=\; 40\pi \ldots\ldots\ldots (0,4\,\mathrm{p}) \end{array}\right.$$

Por definição da integral de superfície, temos

$$(10) \qquad \left|\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\sigma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_2}\,ds &=& \displaystyle -\iint_{D_2} \mathbf{F}(\sigma_2(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}\right] dx\,dy \\ &=& \displaystyle \iint_{D_2} [(x-2)^2 + y^2]\,dx\,dy \ldots\ldots\ldots (0,2\,\mathrm{p}) \end{array}\right.$$

Considere a transformação

$$\left|\begin{array}{rl} x = & 2 + r\cos\theta, \\ y = & r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{array}\right. \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \;\text{ e }\; J(\theta, r) = -r.$$

Além disso, $(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2$. Pelo Teorema da mudança de variáveis, temos

$$(11) \qquad \iint_{D_2} [(x-2)^2 + y^2]\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = 8\pi \ldots\ldots\ldots (0,2\,\mathrm{p})$$

De (8), (9), (10) e (11), obtemos

$$\int_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \;=\; 40\pi + 8\pi = 48\pi \ldots\ldots\ldots (0,2\,\mathrm{p})$$

□

Questão 3 $(2,5\,p)$.- Calcule a integral de linha de campo vetorial $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde C é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ com o cilíndro $x^2+y^2=y$, parametrizada por $\mathbf{r}(t)=(\cos t\,\mathrm{sen}\,t,(\mathrm{sen}\,t)^2,\cos t)$, $-\pi/2\leq t\leq \pi/2$ e $\mathbf{F}$ é o campo vetorial:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{-z}{x^2+y^2+z^2},\ln(1+e^{y^2}),\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Solução :

A curva C está na esfera $x^2+y^2+z^2=1$, é fechada pois $\mathbf{r}(-\pi/2)=\mathbf{r}(\pi/2)$ e tem orientação no sentido anti-horário quando vista de cima. Tem-se que

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y,z)=\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x,y,z).$$

Seja S a porção da esfera limitada pela curva fechada. Como $y\geq 0$, S está definida por $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, $(x,z)\in D$, onde D é a região limitada pela projeção da curva C no plano xz, isto é, limitada pela curva $C_1:\gamma_1(t)=(\cos t\,\mathrm{sen}\,t,0,\cos t)$, $t\in[-\pi/2,\pi/2]$. O vetor normal de S é dado por $N=\dfrac{1}{y}(x,y,z)$. Temos que $C=\partial S$ está orientada positivamente considerando o vetor normal N apontando para cima. O campo vetorial F é de classe C^1 num aberto contendo S. Usando o teorema de Stokes com $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\,ds\\&=\iint_D \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x,y,z)\cdot\frac{1}{y}(x,y,z)dxdz\\&=-2\,\text{Área}\,D.\end{aligned}$$

Calculamos a área da região observando que C_1 está com sentido horário no plano xz, portanto

$$\text{Área}\,D=\int_{C_1^-}xdz=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{sen}\,t\,d(\cos t)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\mathrm{sen}\,t)^2d(\mathrm{sen}\,t)=2/3.$$

Assim obtem-se que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-4/3$.

□

Questão 4 $(2,5\,p)$.- Calcule o trabalho realizado pela força

$$F(x,y,z)=\left(5e^{x^2}+y^2z,2xyz,xy^2+\cos z^2\right),$$

para deslocar uma partícula ao longo da curva γ parametrizada por $\mathbf{r}(t)=((1+\,\mathrm{sen}\,t)\,\mathrm{sen}\,t,t,(1+\,\mathrm{sen}\,t)\cos\,t)$ com $t\in[0,2\pi]$.

Solução :

Precisamos computar a integral de linha $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dr$, porém aplicar diretamente a definição não é viável.

1ra via de solução:

(0.8 pontos) Mostrar que o campo é conservativo.
Observemos que o campo $\mathbf{F}=\left(5e^{x^2}+y^2z,2xyz,xy^2+\cos z^2\right)=(P,Q,R)$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ e

$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k = (2xy - 2xy)i - (y^2 - y^2)j + (2yz - 2yz)k = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$, logo o campo é conservativo.

(0.2 pontos) Determinar o ponto inicial e final da curva γ: $A = \mathbf{r}(0) = (0,0,1)$ e $B = \mathbf{r}(2\pi) = (0, 2\pi, 1)$.

(0.8 pontos)Como o campo é conservativo a integral de linha independe do caminho. Logo podemos pegar uma outra curva que vai de A até B. Por exemplo: $\mathbf{r}(t) = (0, t, 1)$ com $t \in [0, 2\pi]$.

(0.7 pontos) Calculando $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (5e + t^2, 0, \cos 1) \cdot (0, 1, 0)dt = 0.$

2da via de solução:

(0.8 pontos) Mostrar que o rotacional do campo é igual ao vetor nulo.

Observe que o campo $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ e $\text{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k = (2xy - 2xy)i - (y^2 - y^2)j + (2yz - 2yz)k = \mathbf{0}$.

(1.0 pontos) Nesse sentido o campo $\mathbf{F}$ é um candidato a conservativo isto é, buscamos um campo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$. Defina

$$f(x,y,z) := \int_0^x P(t,0,1)dt + \int_0^y Q(x,t,1)dt + \int_1^z R(x,y,t)dt \tag{12}$$

Observe que $P(t, 0, 1) = 5e^{t^2}$, logo

$$\int_0^x P(t,0,1)dt = 5\int_0^x e^{t^2}dt < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Observe que $Q(x, t, 1) = 2xt$, logo

$$\int_0^y Q(x,t,1)dt = 2\int_0^y xtdt = xy^2 < \infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Observe que $R(x, y, t) = xy^2 + \cos t^2$, logo

$$\int_1^z R(x,y,t)dt = \int_1^z xy^2dt + \int_1^z \cos t^2 dt = xy^2(z-1) + \int_1^z \cos t^2 dt, \tag{15}$$

Note que $\int_1^z \cos t^2 dt < \infty$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Segue de (12)-(13)-(14)-(15) que

$$f(x,y,z) = 5\int_0^x e^{t^2}dt + \int_1^z \cos t^2 dt + xy^2 z$$

Podemos verificar que de fato:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5e^{x^2} + y^2 z = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos z^2 + xy^2 = R.$$

(0.2 pontos) Determinar o ponto inicial e final da curva γ: $A = r(0) = (0, 0, 1)$ e $B = r(2\pi) = (0, 2\pi, 1)$.

(0.5 pontos) Aplicar o teorema fundamental das integrais de linha

$$f(A) = f(0,0,1) = 5\int_0^0 e^{t^2}dt + \int_1^1 \cos t^2 dt + 0 = 0,$$

$$f(B) = f(0,2\pi,1) = 5\int_0^0 e^{t^2}dt + \int_1^1 \cos t^2 dt + 0 = 0,$$

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A) = 0 - 0 = 0.$$

□