TEMPO DE PROVA: 2h

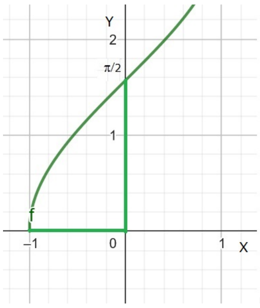
Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

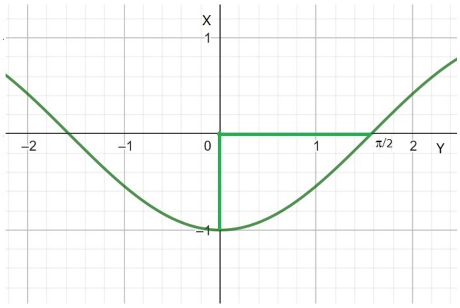
Questão 1: (2.5 pontos)

Calcule

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\pi/2-\text{arcsen}(-x)} y\,dy\right)dx.$$

Solução:





$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\pi/2-\text{arcsen}(-x)} ydy\right)dx = \int_{0}^{\pi/2} ydy \int_{-\cos y}^{0} dx = \int_{0}^{\pi/2} y\cos y\; dy = \int_{0}^{\pi/2} y\; d(\text{sen}\; y) = y\;\text{sen}\; y\,\Big|_{0}^{\pi/2} -$$

$$\int_{0}^{\pi/2}\text{sen}\; y\; dy = y\;\text{sen}\; y\,\Big|_{0}^{\pi/2} + \cos\; y\,\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Observação: $y = \pi/2 - \text{arcsen}(-x) \Rightarrow y - \pi/2 = \text{arcsen}(x) \Rightarrow x = \text{sen}(y - \pi/2) = -\cos y.$

Opcional:

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{\pi/2-\text{arcsen}(-x)} ydy\right)dx = \int_{-1}^{0}\frac{\left(\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}\right)^2}{2}dx = \ldots$$

$$\left.\frac{x\;\text{arcsen}^2(x) + \pi\cdot\left(x\;\text{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2}\right) + 2\sqrt{1-x^2}\;\text{arcsen}(x) + \frac{\pi^2 x}{4} - 2x}{2}\right|_{-1}^{0} =$$

$$\left.\frac{4x\;\text{arcsen}^2(x) + \sqrt{1-x^2}\,(8\;\text{arcsen}(x) + 4\pi) + 4\pi x\;\text{arcsen}(x) + (\pi^2 - 8)\,x}{8}\right|_{-1}^{0} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule a integral

$$\iint_D \frac{e^{(x+2y)/(x-y)}}{(x-y)^2} dx\, dy,$$

onde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x - y \le 2,\ y \le 0 \ \text{ e } \ 2x + y \ge 0\}.$$

Solução:

Definimos as variáveis

$$u = x + 2y, \qquad v = x - y.$$

Ou seja que

$$x = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v, \qquad y = \frac{1}{3}u - \frac{1}{3}v.$$

O determinante Jacobiano da mudança de coordenadas fica

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

O domínio D nas coordenadas (u,v) corresponde a

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le v \le 2,\ u - v \le 0, \ \text{ e } \ u + v \ge 0\}.$$

Logo, pelo teorema da mudança de coordenadas, temos que

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{e^{(x+2y)/(x-y)}}{(x-y)^2} dx\, dy &= \frac{1}{3} \iint_Q \frac{e^{u/v}}{v^2} du\, dv \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(\int_{-v}^{v} \frac{e^{u/v}}{v^2}\, du \right) dv \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{v} \left[e^{u/v} \right]_{u=-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{3}(e - e^{-1}) \int_1^2 \frac{1}{v} dv \\
&= \frac{(e - e^{-1})}{3} \ln(2).
\end{aligned}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Sejam $P(x,y) = \dfrac{y}{4x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = -\dfrac{x}{4x^2 + y^2}$ e seja γ uma curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule

$$\oint_\gamma P dx + Q dy.$$

Solução:

Definamos $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Como as funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são quocientes polinômicos, claramente são continuos em Ω. Observemos que, a curva γ verifica :

$\mathbf{r}(0) = (\sqrt{2},0) = \mathbf{r}(2\pi)$ logo fechada, simples, de classe C^1 e orientada no sentido anti-horário.

Seria muito mais traballhoso resolver a integral de linha diretamente, nesse caso usaremos a ideía de Green para resolver a questão. Porém o ponto $(0,0)$ é um ponto singular do campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ logo o conjunto

$$\mathrm{D}^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq\, 2\} \nsubseteq \Omega.$$

Logo não é possível usar diretamente o Teorema de Green na região compacta D^* de interior não vazio. Vamos aplicar a extensão do Teorema de Green, para o qual vamos a contornar o ponto singular. Observemos que as funções P, Q são de classe C^1 em Ω e além disso,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^2 - y^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{1}$$

Consideremos uma outra curva γ_1 fechada, simples, C^1 por partes, orientada no sentido anti-horário, no objetivo de aplicar a extensão, consideremos a curva γ^- obtida de γ por uma mudança de parâmetro que reverte a orientação. Considere a região D compacta em $\mathbb{R}^2$ contida em Ω de interior não vazio, com fronteira $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma^-$, com interseção de γ_1 e γ^- vazia. Aplicando a extensão, e de (1), obtemos

$$\oint_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \oint_{\gamma^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\right] dA = 0. \tag{2}$$

Buscamos definir γ_1 de modo que $4x^2 + y^2$ seja uma constante, na curva, isto é,

$\gamma_1 \,:\, \mathbf{r_1}(t) = (2\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t) \;\; t \in [0, 2\pi]$ logo $4x^2 + y^2 = 16(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t) = 16$. Resolvendo a integral

$$\oint_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi} \left[\frac{4\mathrm{sen}\, t}{16}\,(-2\mathrm{sen}\, t) - \frac{2\cos t}{16}\,(4\cos t)\right] dt = -\frac{1}{2}(2\pi) = -\pi \tag{3}$$

De (2) e (3), obtemos

$$\oint_{\gamma^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \pi. \tag{4}$$

Porém

$$\oint_{\gamma^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\oint_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{5}$$

De (4) e (5), obtemos

$$\oint_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\pi$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^3$ o domínio limitado por $x^2+y^2+z^2=4$ tal que $4x^2+4y^2 \le z^2$ e $x,y,z \ge 0$. Determine

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz.$$

Solução:

Seja $(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$. O domínio de integração em (r,θ,φ) é determinada pelas 3 condições na definição de D: a primeira é equivalente à $r^2 \le 4$ e a terceira à $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Além disso, a segunda condição é equivalente à $4r^2\sin^2\varphi \le r^2\cos^2\varphi$, ou seja $\tan^2\varphi \le 1/4$. Daí, o domínio de integração é

$$\begin{aligned} E &= \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le \pi/2, 0 \le \varphi \le \varphi_0\} \\ &= \{(r,\theta,\varphi) : 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le \varphi_0\}, \end{aligned}$$

onde $\varphi_0 = \arctan(1/2)$.

Como o Jacobiano é dado por $r^2\sin\varphi$,

$$\begin{aligned} \iiint_D z dxdydz &= \iiint_E r\cos\varphi \;\cdot\; r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\varphi_0}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^3\cos\varphi\sin\varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^3 dr \int_0^{\varphi_0} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \\ &= 2\pi\frac{\sin^2\varphi_0}{2} = \pi\sin^2\varphi_0. \end{aligned}$$

Note que $\tan\varphi_0 = 1/2$ e, como $\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$, então devemos ter que $\cos\varphi_0 = 2/\sqrt{5}$ e $\sin\varphi_0 = 1/\sqrt{5}$. Logo,

$$\iiint_D z dxdydz = \frac{\pi}{5}.$$

Opcional:

Os pontos de interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2=4$ e $4x^2+4y^2=z^2$, satisfazem a equação $x^2+y^2=4/5$.

Logo, a projeção do sólido D sobre o plano xy é a região

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq\frac{4}{5}, x\geq 0, y\geq 0\}.$$

Pelo método da redução temos que

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dxdydz &= \iint_K \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz\,dA\\ &= \frac{1}{2}\iint_K (4-5(x^2+y^2))dA.\end{aligned} \tag{6}$$

Considere a mudança de variáveis $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\theta$ com $(\theta,r)\in B_{\theta r}$, onde

$$B_{\theta r}=\{(\theta,r) : 0\leq r\leq\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}.$$

O determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é $J(\theta,r)=-r$. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_K (4-5(x^2+y^2))dA &= \iint_{B_{\theta r}} (4-5r^2)\,|-r|dA\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2/\sqrt{5}} (4r-5r^3)dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \left(4\frac{r^2}{2}-5\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2/\sqrt{5}} d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{5}d\theta\\ &= \frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

Assim, de (6) temos que

$$\iiint_D z\,dxdydz=\frac{\pi}{5}.$$