Questão 1. (2,5 p).- Considere a integral

$$\mathbf{I} = \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2})}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2+x}}\, dy\, dx.$$

(1) Desenhe a região de integração. Justifique ....(0,5 p).
(2) Trocando a ordem de integração, calcule a integral **I**. Justifique .....(2,0 p).

Solução :

Para obter uma resposta expresemos a região de integração $\mathcal{B}$ como do Tipo 2. Como vamos precisar trabalhar com o inverso, lembremos

$$v = \cos u,\ \ 0 \le u \le \pi \ \ \Leftrightarrow\ \ u = \arccos v,\ \ |v| \le 1. \tag{1}$$

Logo em nosso caso, temos

$$y = \frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}),\ \ |x| \le 2\ \ \Leftrightarrow\ \ x = 2\,\cos(2y),\ \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Resposta item (1) : (0,5 p)

Analizemos a função $y = \frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}),\ \ |x| \le 2$:

Derivando em relação a variável x, obtemos

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}},\quad |x| < 2 \tag{3}$$

Assim observe que $y' < 0$ se $|x| < 2$. Logo a função é decrescente no intervalo $[-2, 2]$. Pela segunda derivada da função y podemos afirmar que o ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão da função. Além disso,

$$\text{se } x = -2 \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}\arccos(\frac{-2}{2}) \ \Leftrightarrow\ y = \frac{\pi}{2}.$$
$$\text{se } x = 2 \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}\arccos(\frac{2}{2}) \ \Leftrightarrow\ y = 0.$$
$$\text{se } y = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}) \ \Leftrightarrow\ x = 0.$$

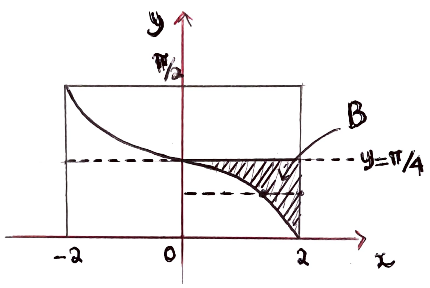

FIGURA 1. Gráfico da região

Resposta item (2) : (2,0 p)

De (2), obtemos que

$$\text{Se } 0 \le y \le \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; 0 \le 2y \le \frac{\pi}{2}$$

mas a função $\cos(2y)$ é decrescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, temos que

$$\text{Se } 0 \le 2y \le \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 0 \le 2\cos(2y) \le 2, \;\; \forall\, y \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Definamos as funções $A(y) = 2\cos(2y)$ e $B(y) = 2$ as quais são contínuas em $[0, \frac{\pi}{4}]$ talque

$$A(y) \le B(y), \;\; \forall y \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

O que nos leva a definir de maneira natural a Região do Tipo 2, seguinte

$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le y \le \frac{\pi}{4} \;\text{ e }\; A(y) \le x \le B(y)\,\}.$$

Como a função $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ é contínua em $\Omega =]-2, \infty[\times \mathbb{R}$, com $\mathcal{B} \subset \Omega$. Aplicando Fubini, obtemos

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{2\cos(2y)}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+x}} \right] dy. \quad ....(0,7\,p)$$

Do fato que $1 + \cos(2y) = 2\cos^2 y$, calculando, obtemos

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \int_{2\cos(2y)}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+x}} &= \big[\, 2\sqrt{2+x}\,\big]_{2\cos(2y)}^{2} = 2[\,2 - \sqrt{2}\,\sqrt{1+cos(2y)}\,]. \\ &= 4[\,1 - \cos y\,] \;<\infty \;\text{ para cada }\; 0 \le y \le \frac{\pi}{4}. \;\; ......(0,8\,p) \end{aligned}$$

De (4) e (5), obtemos que

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{I} \;&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y \, dy. \\ &= \pi - 4\,[\,\text{sen} y\,]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi - \frac{4}{\sqrt{2}} = \pi - 2\sqrt{2}. \;\; ....(0,5\,p) \end{aligned}$$

□

Questão 2. (2,5 p).- Considere a integral

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{3x^3}{y^2} - \frac{1}{y} \right) d\,x\,dy,$$

onde Ω é a região limitada pelas $y = 1 + x^3$, $y = 2 + x^3$, $y = \frac{1}{5}x$ e $y = \frac{1}{2}x$.

(1) Desenhe a região de integração. Justifique .....(0,5 p).

(2) Calcule a integral $\mathbf{I}$. Justifique ......(2,0 p).

Solução :

1. A região de integração Ω: ver Figura 2. (0.5 pontos até aqui);

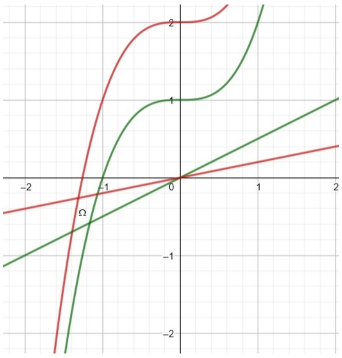

Figura 2: Região de integração.

Opção 1:

2. Mudança de variáveis:

$$u := y - x^3, \quad v := \frac{y}{x}, \text{ logo } 1 \le u \le 2, \text{ e } \frac{1}{5} \le v \le \frac{1}{2}.$$

(0.5 pontos até aqui);

3. Jacobiano: $J(x,y) = -3x + \frac{y}{x^2}$. (0.5 pontos até aqui);

4. Módulo do Jacobiano: $J(x,y) = \frac{-3x^3 + y}{x^2}$. Observa-se que $x < -1$ e $0 > y > -1$ em domínio Ω, (Figura 2). Desta forma $J(x,y) \ge 0$ em Ω e $|J(x,y)| = \frac{-3x^3+y}{x^2}$. (0.5 pontos até aqui);

5. Função de integração:

$$f(x,y) = \frac{3x^3}{y^2} - \frac{1}{y} = \frac{3x^3 - y}{y^2} = \left(\frac{-3x^3+y}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Integral após mudança de variáveis:

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-3x^3(u,v) + y(u,v)}{x^2(u,v)}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\right] \frac{1}{J(x(u,v), y(u,v))}\, dv\, du =$$

$\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-3x^3(u,v) + y(u,v)}{x^2(u,v)}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\right]\left[\frac{x^2(u,v)}{-3x^3(u,v) + y(u,v)}\right] dv = -\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{v^2}$. (0.5 pontos até aqui);

6. Cálculo da integral (menos 0.5 pontos se errar na conta):

$$-\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{v^2} = 1 \cdot \frac{1}{v}\Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = 2 - 5 = -3.$$

Opção 2:

2. Mudança de variáveis: $u := y - x^3$, $1 \le u \le 2$, $v := \frac{y}{x}$, $\frac{1}{5} \le v \le \frac{1}{2}$. (0.5 pontos até aqui);

3. Jacobiano: $J(x,y) = -3x + \dfrac{y}{x^2}$. (0.5 pontos até aqui);

4. Módulo do Jacobiano: $J(x,y) = \dfrac{-3x^3+y}{x^2}$. Observa-se que $x < -1$ e $0 > y > -1$ em domínio Ω, (Fig. 1). Desta forma $J(x,y) > 0$ em Ω e $|J(x,y)| = \dfrac{-3x^3+y}{x^2}$. (0.5 pontos até aqui);

5. Função de integração: $f(x,y) = \dfrac{3x^3}{y^2} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3x^3-y}{y^2} = \left(\dfrac{-3x^3+y}{x^2}\right)\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right)$.

Integral após mudança de variáveis: $\displaystyle\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-3x^3(u,v)+y(u,v)}{x^2(u,v)}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\right]\frac{1}{J(x(u,v),y(u,v))}dv =$

$\displaystyle\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-3x^3(u,v)+y(u,v)}{x^2(u,v)}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\right]\left[\frac{x^2(u,v)}{-3x^3(u,v)+y(u,v)}\right]dv = -\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{v^2}$. (0.5 pontos até aqui);

6. Cálculo da integral (menos 0.5 pontos se errar na conta):

$$-\int_1^2 du \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{v^2} = 1\cdot\frac{1}{v}\Bigg|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = 2-5 = -3.$$

$\square$

Questão 3 $(2,5\,p)$.- Calcule a integral

$$\mathbf{I} = \int\int\int_W dx\,dy\,dz,$$

onde W é um sólido com fronteira dada por $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\quad a>0,\ b>0$ e $c>0$.. Justifique.

Solução :

Método 1 :

Se W representa o sólido delimitado pelo elipsoide, então

$$\mathrm{Vol}(W) = \iiint_W dx\,dy\,dz = \iiint_W dV.$$

Considerando a transformação definida pelas equações

(7) $$x(u,v,w) = au \quad y(u,v,w) = bv \quad z(u,v,w) = cw,$$

que leva a esfera sobre o elipsoide. Então segue que

$$\mathrm{Vol}(W) = \iiint_W dV = \iiint_Q \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw,$$

onde o conjunto Q é a região de limitada pela esfera de raio 1, i.e

$$Q = \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \,:\, u^2+v^2+w^2 \le 1\}$$

e a transformação definida pelas equações (7) é injetora. Por outra parte, o Jacobiano da transformação

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc,$$

é diferente de zero pelo fato que a, b e c são constantes positivas. Consequentemente,

$$\mathrm{Vol}(W)=\iiint_W dx\,dy\,dz=abc\iiint_Q du\,dv\,dw\ =\ abc\ \mathrm{Vol}(Q).$$

Portanto,

$$\boxed{\mathrm{Vol}(W)=\frac{4}{3}\pi abc}$$

Método 2 :

Observe que o sólido

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

é simétrico em todos os eixos de $\mathbb{R}^3$ e a função $f(x,y,z)=1$. Logo par em todas suas componentes. Assim,

$$\iiint_W dV=8\iiint_{W^+} dV \tag{8}$$

onde W^+ é o pedaço da elipse que está no primeiro octante. Daí,

$$\begin{aligned}8\iiint_{W^+} dV&=8\iint_{K^+}\left[\int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} dz\right]dA\\ &=8\iint_{K^+} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dA\end{aligned}$$

onde o conjunto K^+ está definido

$$K^+=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ \ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

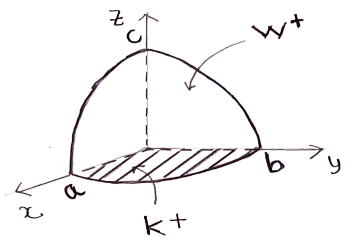

Figura 2. Gráfico da região

Consideremos a mudança de variável

$$\begin{aligned}x&=ar\cos\theta;\\ y&=br\sin\theta.\end{aligned}$$

O define a transformação linear

$$T(r,\theta)=(ar\cos\theta,br\sin\theta),\qquad\forall(r,\theta)\in B^+,$$

onde,

$$B^{+} = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R} \,:\, 0 \le r \le 1 \;\; e \;\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

Observação 1. *Observe que a fronteira de W no primeiro octante, denotada por ∂W^{+}:*

$$\begin{aligned} x = 0 \;\Rightarrow\; \theta &= \frac{\pi}{2} \;\; \textit{para} \;\; y > 0; \\ y = 0 \;\Rightarrow\; \theta &= 0 \;\; \textit{para} \;\; x > 0. \end{aligned}$$

e

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \;\Leftrightarrow r^2 = 1 \;\Leftrightarrow r = 1.$$

Por outro lado,

$$J(T) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)} = \begin{vmatrix} -ar\sin\theta & a\cos\theta \\ br\cos\theta & b\sin\theta \end{vmatrix} = -abr.$$

De tudo, é claro que T é de classe C^1 e $J(T) \neq 0$ no interior de B^{+}. Pelo teorema de mudanÃ§a de variáveis, obtemos que

$$\begin{aligned} \iint_{K^{+}} c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dA &= \iint_{B^{+}} c\sqrt{1-r^2} |-abr|\, dA \\ &= abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr d\theta \\ &= abc\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1\right) \\ &= abc\left(\frac{\pi}{6}\right)(1-0) = \frac{abc}{6}\pi. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\iint_{K^{+}} c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dA = \frac{abc}{6}\pi. \tag{9}$$

De (8) e (9), obtemos

$$\iiint_W dV = 8\left(\frac{abc}{6}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

$\square$

Questão 4 $(2,5\,p)$.- Calcule a integral

$$\mathbf{L} \;=\; \int_\gamma (2xe^{xy} + x^2ye^{xy})\, dx + (x^2 + x^3e^{xy})\, dy$$

onde γ é o pedaço dada curva dada pela equação $y = 4 - x^2$, com $x \ge 0$, $y \ge 0$, orientada no sentido anti-horário. Justifique.

Solução :

Vamos aplicar o Teorema de Green fechando a curva γ com 2 segmentos de reta γ_1 e γ_2, onde γ_1 é o segmento de reta indo do ponto $(0,4)$ à origem $(0,0)$ e γ_2 é o segmento de reta indo da origem $(0,0)$ ao ponto $(2,0)$. Observe que $\partial D = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ é simples e orientada no sentido anti-horário, onde D é a região :

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 4 - x^2\}.$$

Portanto, pelo Teorema de Green,

$$\int_{\partial D} \underbrace{(2xe^{xy} + x^2ye^{xy})}_{F_1}\, dx + \underbrace{(x^2 + x^3e^{xy})}_{F_2}\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Usando a decomposição de ∂D como união de γ, γ_1 e γ_2 e que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + (3x^2 + x^3)e^{xy},$$

obtemos a seguinte fórmula para o cálculo da integral pedida:

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} 2x\,dy\,dx - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F_1\,dx + F_2\,dy. \tag{10}$$

O cálculo da integral dupla nos dá:

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 2x\,dy\,dx = \int_0^2 8x - 2x^3\,dx = (4x^2 - \frac{x^4}{2})\Big|_{x=0}^{x=2} = 8$$

A parametrização dos segmentos γ_1 e γ_2 é dada por:

$$\gamma_1 : x = 0,\ y = 4 - t,\ \text{ com } t \in [0, 4]$$
$$\gamma_2 : x = t,\ y = 0,\ \text{ com } t \in [0, 2].$$

Daí, temos que

$$\int_{\gamma_1} F_1\,dx + F_2\,dy = 0,\ \int_{\gamma_2} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^2 2t\,dt = t^2\Big|_{t=0}^{t=2} = 4.$$

Substituindo os valores na fórmula (10), concluímos que

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = 8 - 4 = 4.$$

$\square$