Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral III - MAC238
Gabarito da primeira prova unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 13/10/2022

TEMPO DE PROVA: 2h00

Questão 1: (2.0 pontos)

Calcule $\mathcal{I} = \int\limits_{\mathcal{S}} x^2yz\,\mathrm{d}V$, onde $\mathcal{S}$ é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x+y+z-2 = 0$.

Solução:

$$\mathcal{I} = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 x^2dx \int_0^{2-x} ydy \int_0^{2-x-y} zdz = \int_0^2 x^2dx \int_0^{2-x} y\frac{((2-x)-y)^2}{2}dy$$

$$= \int_0^2 x^2dx \int_0^{2-x} \Big(\frac{(2-x)^2}{2}y - (2-x)y^2 + \frac{y^3}{2}\Big)dy$$

$$= \int_0^2 x^2 \left[\frac{(2-x)^2}{2}\frac{y^2}{2} - (2-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8}\right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 x^2 \left[\frac{(2-x)^4}{4} - \frac{(2-x)^4}{3} + \frac{(2-x)^4}{8}\right] dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^2 x^2(2-x)^4dx = \Big[u := 2-x\Big] = \frac{1}{24}\int_0^2 (2-u)^2u^4du = \frac{1}{24}\int_0^2 (4-4u+u^2)u^4du$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^2 (4u^4 - 4u^5 + u^6)du = \frac{1}{24}\left[\frac{4}{5}u^5 - \frac{4}{6}u^6 + \frac{1}{7}u^7\right]_0^2 = \frac{u^5}{24}\left[\frac{4}{5} - \frac{2}{3}u + \frac{1}{7}u^2\right]_0^2$$

$$= \frac{32}{24}\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{32}{24}\cdot\frac{4}{105} = \frac{16\cdot 2\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 4\cdot 105} = \frac{16}{315}.$$

Questão 2: (2.0 pontos)

Considere o campo vetorial dado por $F(x,y) = (2xy - \mathrm{sen}(x), x^2 + 3x - e^y)$ e seja $\mathcal{C}$ uma curva fechada simples que limita uma região $\mathcal{D}$ cuja área é $5\,cm^2$. Suponha que $\mathcal{C}$ seja percorrida com orientação positiva e apenas uma vez. Calcule a integral de linha

$$\oint_{\mathcal{C}} F\cdot\mathrm{d}s.$$

Solução:

Usando o Teorema de Green obtemos

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot \mathrm{d}s = \int\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \int\int_{\mathcal{D}} 3\,\mathrm{d}A = 3\,\text{área}(\mathcal{D}) = 15.$$

Questão 3: (2.0 pontos)

Calcule a integral $\int_{\mathcal{C}} F \cdot \mathrm{d}r$ onde $F(x,y) = (ye^{xy} + \cos x)\,\mathbf{i} + \left(xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1}\right)\mathbf{j}$ e $\mathcal{C}$ é a porção da curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução:

Verificamos que o campo vetorial F satisfaz $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

Calculemos o potencial de F, isto é, vamos determinar uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \cos x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1}$

$$f(x,y) = \int ye^{xy} + \cos x \,\mathrm{d}x = e^{xy} + \operatorname{sen} x + g(y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} + \operatorname{sen} x + g(y)\right) &= xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1} \\
xe^{xy} + g'(y) &= xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1} \\
g'(y) &= \frac{1}{y^2+1} \\
g(y) &= \arctan y + c.
\end{aligned}$$

Logo podemos tomar $f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen} x + \arctan y$

A curva $\mathcal{C}$ pode ser parametrizada por $r(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le \pi/2$. Computando o ponto inicial $A = r(0) = (0,0)$ e final $B = r(\pi/2) = (\pi/2, 1)$ da curva.

Aplicando o Teorema Fundamental para as integrais de linha temos

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot \mathrm{d}r = \int \nabla f \cdot \mathrm{d}r = f(B) - f(A) = e^{\pi/2} + 1 + \pi/4 - (1 + 0 + 0) = e^{\pi/2} + \pi/4.$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Calcule

$$\mathcal{I} = 5 \int\int_{\mathcal{D}} \cos[\,(x+2y)^2 + (3y-x)^2\,]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

onde

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2y)^2 + (3y-x)^2 \le \frac{9\pi}{2} \right\}.$$

(**Dica:** Faça a mudança de variáveis $u = x + 2y$, $v = 3y - x$.)

Solução:

Usando a mudança de variáveis sugerida temos:

$$\mathcal{I} = 5 \int\int_{\mathcal{D}} \cos[\,(x+2y)^2 + (3y-x)^2\,]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cos[\,u^2+v^2\,]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

uma vez que

$$\left|\det\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]\right| = 5.$$

O domínio de integração $\widetilde{\mathcal{D}}$ corresponde a escrever $\mathcal{D}$ nas novas variáveis (u, v). Temos:

$$(x+2y)^2 + (3y-x)^2 \leq \frac{9\pi}{2} \Longleftrightarrow u^2+v^2 \leq \frac{9\pi}{2}.$$

Logo

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq \frac{9\pi}{2}\right\}.$$

Façamos, agora, a nova mudança de variáveis

$$u = r\cos\theta\,,\; v = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Então vem:

$$\int\int_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cos[\,u^2+v^2\,]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int\int_{\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}} \cos(\,r^2\,)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

uma vez que

$$\left|\det\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right]\right| = r.$$

Ainda,

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}} = \left\{0 \leq r \leq \sqrt{\frac{9\pi}{2}}\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Nosso cálculo se reduziu a efetuar

$$\begin{aligned}
\int\int_{\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}} \cos(\,r^2\,)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{9\pi}{2}}} \cos(\,r^2\,)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{9\pi}{2}} (\cos w)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,w\Big|_0^{\frac{9\pi}{2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{I} = \pi.$$

Usamos acima $w = r^2$, $\mathrm{d}w = 2r\mathrm{d}r$ e $\mathrm{sen}(9\pi/2) = 1$.

Questão 5: (2.0 pontos)

Dada a integral dupla

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3/2}} \int_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(a) Esboce a região $\mathcal{D}$.

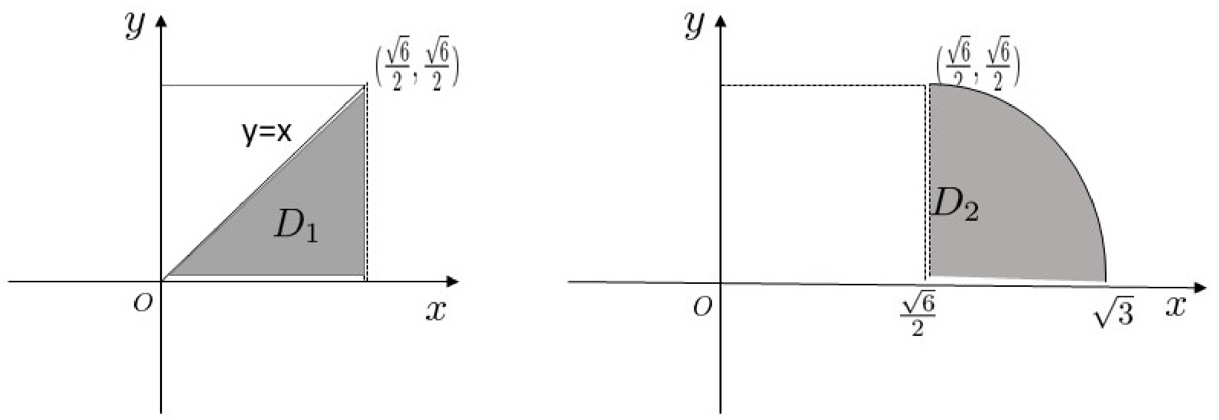
(b) Expresse a soma das integrais do segundo membro da igualdade como uma única integral na qual a ordem de integração esteja invertida.

(c) Calcule a integral dupla $\mathcal{I}$ para a função $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Solução:

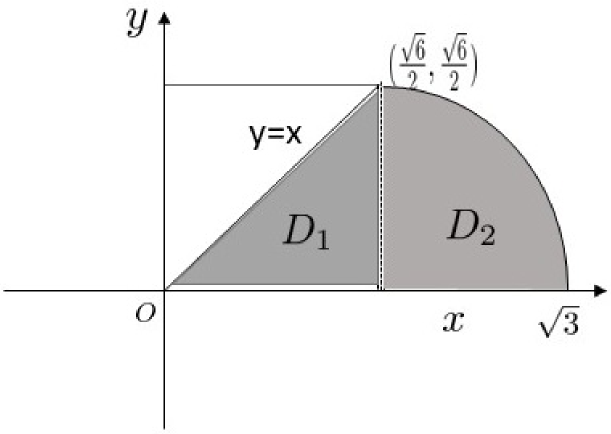
(a) Temos $\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ com $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, onde $\mathcal{D}_1 = \{(x,y); 0 \le x \le \sqrt{3/2}, 0 \le y \le x\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{(x,y); \sqrt{3/2} \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le \sqrt{3-x^2}\}$.

Os esboços de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são:



Regiões $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$

Logo, o esboço de $\mathcal{D}$ é:



Região $\mathcal{D}$

(b) Olhando $\mathcal{D}$ como região do tipo II, temos

$$\mathcal{D} = \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y \leq x \leq \sqrt{3 - y^2} \end{cases}$$

Daí, $\mathcal{I} = \int_0^{\sqrt{3/2}} \int_y^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

(c) Em coordenadas polares, obtemos

$$\mathcal{D} = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Assim,

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}_{r,\theta}} e^{r^2} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{r^2} r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{3}} e^{r^2} r\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}(e^3 - 1).$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.