Instituto de Matematica – IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral II

3a Prova Unificada – 03 de Julho de 2026

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 + x^4 y + y^3}{x^6 + y^3}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que f não é contínua.

Solucao:

Note que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, pois é igual a uma função racional nessa região. Para que mostrar que f não é contínua em $(0,0)$, vamos mostrar que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Se $y = 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x,0) = \frac{x^6 + 0 + 0}{x^6 + 0} = 1.$$

Logo $f(x,y) \to 1$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo x.

Se $y = x^2$, e $x \neq 0$, temos

$$f(x,x^2) = 1 + \frac{x^4 x^2}{x^6 + (x^2)^3} = 1 + \frac{x^6}{2x^6} = \frac{3}{2}.$$

Logo $f(x,y) \to \frac{3}{2}$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$. Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos diferentes, segue que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Numa placa de metal retangular, é colocada um sistema de coordenadas cartesianas e a temperatura em cada ponto (x,y) é dada por:

$$\mathbf{T}(x,y) = 100 - 2x^3 - y^2 + xy$$

i) Determine o gradiente da função temperatura num ponto qualquer da placa.

ii) Considere uma partícula no ponto $P = (1,0)$. Se a partícula se move na direção do vetor $v = (-3,4)$ sua temperatura está aumentando ou diminuindo?

iii) Considere a mesma partícula no ponto $P = (1,0)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de T passando por $(1,0,T(1,0))$.

Solucao:

O gradiente de T é dado por

$$\nabla \mathbf{T}(x,y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = (-6x^2 + y,\ -2y + x)$$

O gradiente de T no ponto $P = (1,0)$ é dado por

$$\nabla \mathbf{T}(1,0) = (-6, 1)$$

A norma do vetor $v = (-3,4)$ é

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

A derivada direcional é dada por

$$\nabla \mathbf{T}(1,0) \cdot \frac{v}{\|v\|} = (-6,1) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{22}{5}$$

Como a derivada direcional na direção de v é positiva, a temperatura está **aumentando**.

Como temos $\mathbf{T}(1,0) = 98$ e $\nabla \mathbf{T}(1,0) = (-6,1)$, a equação do plano tangente a T que passa por $(1,0,98)$ é

$$z - 98 = -6(x-1) + (y-0) \Leftrightarrow 6x - y + z = 104$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = 6xy - 3x^2 - 2y^3$.

Solucao:

Pontos críticos. Anulamos o gradiente:

$$f_x = 6y - 6x = 0 \implies y = x,$$

$$f_y = 6x - 6y^2 = 0 \implies x = y^2.$$

Substituindo $y = x$ na segunda equação, $x = x^2$, ou seja $x(x-1) = 0$, logo $x = 0$ ou $x = 1$. Os pontos críticos são

$$(0,0) \qquad \text{e} \qquad (1,1).$$

Teste da Hessiana. As derivadas segundas são

$$f_{xx} = -6, \qquad f_{yy} = -12y, \qquad f_{xy} = 6,$$

portanto

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-6)(-12y) - 36 = 72y - 36.$$

Classificação.

- $(0,0)$: $D = -36 < 0 \Rightarrow$ **ponto de sela**.
- $(1,1)$: $D = 72 - 36 = 36 > 0$ e $f_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow$ **máximo local**, com $f(1,1) = 1$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Uma empresa utiliza x equipamentos e y trabalhadores para produzir uma quantidade de bens dada pela função

$$Q(x,y) = xy.$$

O custo de operação de cada equipamento é 12 unidades de valor (u.v. medido em milhares de reais) e o salário de cada trabalhador é 3 u.v. Sabendo que a empresa possui um orçamento de exatamente 240 u.v., responda os itens a seguir.

i) Encontre a função $g(x,y)$ tal que a curva de nível $g(x,y) = 0$ modela a restrição orçamentária da empresa.

ii) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar a produção máxima que a empresa pode ter sob essa restrição.

Solucao:

i) A restrição orçamentária pode ser escrita como $12x + 3y = 240$. Portanto, a função g é

$$g(x,y) = 12x + 3y - 240$$

ii) Queremos maximizar

$$Q(x,y) = xy$$

sujeito à restrição $g = 0$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, no ponto de máximo deve valer

$$\nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Calculando as derivadas parciais de Q:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = x.$$

E as derivadas parciais de g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 12, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 3.$$

Logo, o sistema fica:

$$y = 12\lambda \tag{1}$$
$$x = 3\lambda \tag{2}$$
$$12x + 3y = 240 \tag{3}$$

Substituindo as duas primeiras equações na terceira, obtemos $72\lambda = 240 \Rightarrow \lambda = 10/3$. Daí, temos $x = 10$ e $y = 40$. Portanto, a produção máxima é:

$$Q(10, 40) = 400$$

Boa prova!