TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja S a superfície dada pela equação $x^2 + y^2 = z^2$. A curva C é dada pela interseção entre S e o plano definido por $x + z = 2$.

(a) Encontre uma parametrização para C.

(b) Encontre um ponto em C cujo vetor tangente é horizontal, ou seja, ortogonal ao vetor $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$.

Solução:

(a) Na interseção entre as duas superfícies, ambas suas equações precisam ser satisfeitas simultaneamente. Obtemos assim um sistema. Da segunda equação podemos escrever $z = 2 - x$. Substituindo na primeira equação, obtemos $x = 1 - y^2/4$ e, portanto, $z = 2 - x = 1 + y^2/4$. Usando a coordenada y como parâmetro t, parametrizamos a curva C como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t^2/4, t, 1 + t^2/4), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) O vetor tangente a C é dado por $\mathbf{r}'(t) = (-t/2, 1, t/2)$. Teremos um vetor tangente horizontal quando $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}} = t/2 = 0$, cuja única solução é $t = 0$. Assim, o ponto cujo vetor tangente é horizontal é o ponto dado por $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 1)$.

Questão 2: (2.5 pontos)

(a) Encontre a solução da EDO:

$$ty' + y = 2t\sin(2t), \ t > 0$$

(b) Considere um sistema oscilatório descrito pelo problema de valor inicial:

$$x''(t) + x(t) = e^{2t}$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 12/5$$

Determine a solução $x(t)$.

Solução:

(a) Começamos reconhecendo que podemos escrever a EDO como $(ty)' = 2t\sin(2t)$. Integrando dos dois lados obtemos

$$ty = \int 2t\sin(2t)dt + C = -t\cos(2t) + \int \cos(2t)dt + C$$

onde a segunda igualdade é obtida através da integração por partes. Finalizando a integral e dividindo a equação por t escrevemos

$$y(t) = \frac{C}{t} - \cos(2t) + \frac{1}{2t}\sin(2t)$$

(b) O caso homogêneo associado à equação é $x'' + x = 0$. Seu polinômio característico é $\lambda^2 + 1$, cujas raízes são $\lambda = \pm i$. Assim, a solução da parte homogênea é dada por $x_H = C_1\cos(t) + C_2\sin(t)$. Tomamos como hipótese para solução particular $x_P = Ae^{2t}$. Assim, $x'_P = 2Ae^{2t}$ e $x''_P = 4Ae^{2t}$. Substituindo na equação, obtêm-se $A = 1/5$ e escrevemos a solução geral

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \frac{1}{5}e^{2t}$$

Através das condições iniciais, obtemos $C_1 = -1/5$ e $C_2 = 2$ de forma que a solução do PVI é

$$x(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) + 2\sin(t) + \frac{1}{5}e^{2t}$$

Questão 3: (2.5 pontos)

Sejam duas curvas C_1 e C_2 parametrizadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= (2\cos t, 2\sin t, b), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{r}_2(s) &= (s, s, s^2), \quad s > 0 \end{aligned}$$

(a) Calcule o valor de b para que C_1 e C_2 possuam uma interseção.

(b) Encontre o ângulo entre as curvas na interseção.

Solução:

(a) Na interseção, precisamos que

$$\begin{aligned} 2\cos t_0 &= s_0 \\ 2\sin t_0 &= s_0 \\ b &= s_0^2 \end{aligned}$$

Das duas primeiras equações obtemos que $\cos t_0 = \sin t_0$. Além disso, $2\cos t_0 = s_0 > 0$, portanto a única solução é $t_0 = \pi/4$. Da terceira equação obtemos $s_0 = \sqrt{b}$. Substituindo novamente na primeira equação, $2\cos(\pi/4) = \sqrt{b}$ somente se $b = 2$. Assim, o ponto de interseção das curvas é $\mathbf{r}_1(\pi/4) = \mathbf{r}_2(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

(b) O ângulo entre as curvas é o ângulo entre seus vetores tangentes. O vetor tangente à curva C_1 é dado por $\mathbf{r}'_1(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$, na interseção $\mathbf{r}'_1(\pi/4) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. O vetor tangente a C_2 é $\mathbf{r}'_2(s) = (1, 1, 2s)$, e na interseção $\mathbf{r}'_2(\sqrt{2}) = (1, 1, 2\sqrt{2})$. O produto interno entre os vetores tangentes é portanto

$$\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

Assim, os vetores são ortogonais, e seu ângulo é $\theta = \pi/2$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Seja $\mathcal{C}$ a curva de interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com o plano $x+z=0$, situada no semi-espaço $y \geq 0$. Seja ϕ a reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(1, \sqrt{2}, -1)$. Encontre o ponto onde ϕ intercepta o plano de coordenadas xy.

Solução:

Na interseção a equação da esfera e do plano precisam ser satisfeitas simultaneamente. Da equação do plano, podemos escrever $z=-x$ e substituir na equação da esfera, obtendo $2x^2+y^2=4$. Reescrevemos essa equação como $x^2/2+y^2/4=1$ de forma a parametrizar a curva C como

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t), -\sqrt{2}\cos(t)), \quad t \in [0, \pi]$$

O vetor tangente à C em cada ponto é dado por $\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin(t), 2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t))$. Além disso, no ponto $(1, \sqrt{2}, -1)$ temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\cos(t_0) &= 1 \\ 2\sin t_0 &= \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\cos(t_0) &= -1 \end{aligned}$$

de onde obtemos $t_0 = \pi/4$. Podemos portanto parametrizar a reta tangente ϕ como

$$\phi(s) = \mathbf{r}(t_0) + s.\mathbf{r}'(t_0) = (1, \sqrt{2}, -1) + s(-1, \sqrt{2}, 1)$$

Temos que ϕ intercepta o plano xy quando sua coordenada z é nula, ou seja, $-1+s=0$ de onde obtemos $s=1$. Finalmente, o ponto de interseção é $\phi(1) = (0, 2\sqrt{2}, 0)$.