Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral 2 2022.2 - MAC128
Gabarito segunda prova de segunda chamada - Escola Politécnica / Escola de Química - 20/1

TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Mostre que a função $y(x) = Cx + C - C^2$, $x \in \mathbb{R}$, onde C é uma constante real, é solução da equação $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - (1+x)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

(b) Calcule uma solução particular da equação $2y'' + 3y' + y = x + 3\,\mathrm{sen}\,x$.

Solução:

(a) Se $y(x) = Cx + C - C^2$, então $y'(x) = C$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (1+x)\frac{dy}{dx} + y \\
&= C^2 - (1+x)C + (Cx + C - C^2) \\
&= C^2 - C - Cx + Cx + C - C^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) O polinômio característico associado à equação é $2\lambda^2 + 3\lambda + 1$, cujas raízes são $\lambda_1 = -1/2$ e $\lambda_2 = -1$. Logo a solução geral da equação homogênea $2y'' + 3y' + y = 0$ é $y_h(x) = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-x}$.

Usando o método dos coeficientes indeterminados, buscamos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y_p(x) = Ax + B + C\,\mathrm{sen}\,x + D\cos x$, onde A, B, C e D são constantes a determinar. Calculamos $y_p'(x) = A + C\cos x - D\,\mathrm{sen}\,x$ e $y_p''(x) = -C\,\mathrm{sen}\,x - D\cos x$. Então,

$$\begin{aligned}
&2y_p'' + 3y_p' + y_p \\
&= 2(-C\,\mathrm{sen}\,x - D\cos x) + 3(A + C\cos x - D\,\mathrm{sen}\,x) + (Ax + B + C\,\mathrm{sen}\,x + D\cos x) \\
&= Ax + (3A + B) + (-C - 3D)\,\mathrm{sen}\,x + (-D + 3C)\cos x.
\end{aligned}$$

Logo, para que y_p seja solução de $2y'' + 3y' + y = x + 3\,\mathrm{sen}\,x$, precisamos que

$$\begin{cases}
A = 1, \\
3A + B = 0, \\
-C - 3D = 3, \\
-D + 3C = 0.
\end{cases}$$

Da segunda equação temos que $B = -3$. Da quarta equação, $D = 3C$ e, substituindo na terceira equação, temos que $-10C = 3$, ou seja que $C = -3/10$ e $D = -9/10$. Assim,

$$y_p(x) = x - 3 - \frac{3}{10}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{9}{10}\cos x.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja S a superfície no $\mathbb{R}^3$ dada pela equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$.

(a) Parametrize a reta normal à S no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

(b) Determine todos os pontos (x_0, y_0, z_0) em S tais que a reta normal a S em (x_0, y_0, z_0) passa pela origem.

Solução:

(a) Vemos que S é a superfície de nível $f(x, y, z) = 8$ da função $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$. Logo, o vetor normal a S em (x_0, y_0, z_0) é $n = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 6y_0, 8z_0)$ e a reta normal pode ser parametrizada por

$$r(t) = ((1 + 2t)x_0, (1 + 6t)y_0, (1 + 8t)z_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) A reta acima passa pela origem se

$$\begin{cases} (1 + 2t)x_0 = 0, \\ (1 + 6t)y_0 = 0, \\ (1 + 8t)z_0 = 0. \end{cases}$$

Analisamos caso a caso.

- Se $x \neq 0$, então $t = -\frac{1}{2}$. Nesse caso, necessáriamente temos que $y_0 = 0$ e $z_0 = 0$. Como (x_0, y_0, z_0) está em S, então $x_0^2 = 8$. Obtemos dois pontos: $(\pm\sqrt{8}, 0, 0)$.
- Similarmente, se $y \neq 0$, então $t = -\frac{1}{6}$. Nesse caso, necessáriamente temos que $x_0 = 0$ e $z_0 = 0$. Como (x_0, y_0, z_0) está em S, então $3y_0^2 = 8$. Logo, $y_0^2 = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ e obtemos mais dois pontos: $(0, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$
- Finalmente, se $z \neq 0$, então $t = -\frac{1}{8}$. Nesse caso, necessáriamente $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e, como (x_0, y_0, z_0) está em S, então $4z_0^2 = 8$. Logo, $z_0 = \pm\sqrt{2}$ e obtemos mais dois pontos: $(0, 0, \pm\sqrt{2})$.

Portanto, os pontos de S cuja reta normal passa pela origem são $(0, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$ e $(0, 0, \pm\sqrt{2})$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Um objeto se desloca no espaço $\mathbb{R}^3$ seguindo uma trajetória descrita pela função vetorial

$$r(t) = ((5 - t)\cos(2\pi t)\,,\, (5 - t)\operatorname{sen}(2\pi t)\,,\, t)\,, \quad t \in [0, 5].$$

(a) Calcule a velocidade escalar do objeto no instante em que ele passa pelo ponto $P_0 = (4, 0, 1)$.

(b) Determine o instante $t_1 \in \mathbb{R}$ no qual o objeto passa pelo cone de equação

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Solução:

(a) Veja que $P = r(1)$. O vetor velocidade do objeto em cada instante de tempo t está dado por

$$r'(t) = \Big(-\cos(2\pi t) - 2\pi(5-t)\,\mathrm{sen}\,(2\pi t)\,,\ -\mathrm{sen}\,(2\pi t) + 2\pi(5-t)\cos(2\pi t)\,,\ 1\Big).$$

Logo, o vetor velocidade do objeto no instante $t_0 = 1$ é $V := r'(1) = (-1, 8\pi, 1)$. Assim, a velocidade escalar do objeto no momento em que passa por P é

$$\|V\| = \sqrt{2 + 64\pi^2}.$$

(b) O valor de $t = t_1$ quando $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ passa pelo cone, deve satisfazer

$$x(t_1)^2 + y(t_1)^2 = z(t_1)^2.$$

Isto é,

$$(5-t_1)^2(\cos(2\pi t_1))^2 + (5-t_1)^2(\mathrm{sen}\,(2\pi t_1))^2 = t_1^2,$$

ou seja, $(5-t_1)^2 = t_1^2$. Logo, $t_1 = \frac{5}{2}$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = 2x^4 + \frac{y^3}{3} - x^2 - 4y \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Solução:

Um ponto (x_0, y_0) é ponto crítico de f se

$$\nabla f(x_0, y_0) = \big(8x^3 - 2x,\ y^2 - 4\big) = (0,0).$$

Assim, se

$$8x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{1}{2};$$

$$y^2 = 4 \iff y = \pm 2.$$

Temos assim seis pontos críticos:

$$P_1 = (0,2), \qquad P_2 = (0,-2), \qquad P_3 = (1/2, 2),$$
$$P_4 = (1/2,-2), \quad P_5 = (-1/2, 2), \quad P_6 = (-1/2,-2).$$

Dado $P \in \mathbb{R}^2$, observe que

$$\mathcal{H}_f(P) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\right)^2.$$

No presente caso, temos

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix}$$

Logo,

$$\mathcal{H}_f(0,2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \;\Rightarrow\; \textbf{Sela};$$

$$\mathcal{H}_f(0,-2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \;\Rightarrow\; \textbf{Max. Local};$$

$$\mathcal{H}_f(1/2,2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \;\Rightarrow\; \textbf{Min. Local};$$

$$\mathcal{H}_f(1/2,-2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -16 \;\Rightarrow\; \textbf{Sela};$$

$$\mathcal{H}_f(-1/2,2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \;\Rightarrow\; \textbf{Min. Local};$$

$$\mathcal{H}_f(-1/2,-2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -16 \;\Rightarrow\; \textbf{Sela}.$$