TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

(a) Mostre que a função $y(x) = Cx + C - C^2$, $x \in \mathbb{R}$, onde C é uma constante real, é solução da equação $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - (1+x)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

(b) Calcule uma solução particular da equação $2y'' + 3y' + y = x + 3\,\text{sen}\,x$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja S a superfície no $\mathbb{R}^3$ dada pela equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$.

(a) Parametrize a reta normal à S no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

(b) Encontre todos os pontos (x_0, y_0, z_0) em S tais que a reta normal a S em (x_0, y_0, z_0) passa pela origem.

Questão 3: (2.5 pontos)

Um objeto se desloca no espaço $\mathbb{R}^3$ seguindo uma trajetória descrita pela função vetorial

$$r(t) = ((5-t)\,\cos(2\pi t)\,,\,(5-t)\,\text{sen}(2\pi t)\,,\,t)\,,\quad t \in [0,5].$$

(a) Calcule a velocidade escalar do objeto no instante em que ele passa pelo ponto $P_0 = (4, 0, 1)$.

(b) Determine o instante $t_1 \in \mathbb{R}$ no qual o objeto passa pelo cone de equação

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y) = 2x^4 + \frac{y^3}{3} - x^2 - 4y \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$