TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere uma curva plana parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, passando pelo ponto $(1, \frac{7}{4})$ no instante $t = 0$ e tendo seu vetor tangente satisfazendo a seguinte equação:

$$r'(t) = (y(t), 2y(t) + t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Sabendo que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis, determine as equações paramétricas da curva.

Solução:

A condição sobre o vetor tangente da curva implica que

$$r'(t) = (x'(t), y'(t)) = (y(t), 2y(t) + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $y'(t) - 2y(t) = t$. Essa equação é linear. O fator integrante está dado por $I(t) = e^{-2t}$. Multiplicando ambos lados da equação por $I(t)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = e^{-2t}t.$$

Logo, $e^{-2t}y(t) = \int e^{-2t}t\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}t - \frac{1}{4}e^{-2t} + C$. Assim, $y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + Ce^{2t}$. Como $y(0) = \frac{7}{4}$, vemos que $\frac{7}{4} = -\frac{1}{4} + C$ e, portanto, $C = 2$. Concluimos que

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + 2e^{2t}.$$

Finalmente, temos que $x'(t) = y(t)$ e, portanto, $x(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + e^{2t} + D$. Como $x(0) = 1$, temos que $1 = 1 + D$, ou seja que $D = 0$ e

$$x(t) = -\frac{(t^2 + t)}{4} + e^{2t}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Sabendo que ele existe, determine as coordenadas do ponto no plano $2x - y + 2z = 20$ mais próximo da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. (*Observe que o ponto que minimiza a distância $d(x, y, z)$ é o mesmo que minimiza a distância quadrática, isto é, $[d(x, y, z)]^2$.*)

Solução:

Buscamos minimizar a função $f(x, y, z) = [d(x, y, z)]^2 = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita à restrição $g(x, y, z) = 20$, onde $g(x, y, z) = 2x - y + 2z$. Veja que $\nabla g(x, y, z) = (2, -1, 2) \neq (0, 0, 0)$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto $P = (x, y, z)$ de mínimo é solução do sistema $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, com $2x - y + 2z = 20$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda, \\ 2y = -\lambda, \\ 2z = 2\lambda, \\ 2x - y + 2z = 20. \end{cases}$$

No caso, temos que $\lambda = x$ e, portanto, $y = -\frac{x}{2}$ e $z = x$. Substituindo na última equação, obtemos que $2x + \frac{x}{2} + 2x = 20$. Ou seja que $\frac{9x}{2} = 20$ e, então, $x = \frac{40}{9}$, $y = \frac{-20}{9}$ e $z = \frac{40}{9}$.

Concluimos que o ponto do plano de equação $2x - y + 2z = 20$ mais próximo da origem é $P = \left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right)$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + y^2}{2 + 3x^2}$.

(a) Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a curva de nível $f(x,y) = k$ é uma elipse.

(b) Entre os valores obtidos no ítem acima, determine o valor de k para o qual a curva de nível é um círculo. No caso, determine o centro e o raio do círculo.

(c) Determine a imagem de f.

Solução:

(a) A curva de nível $f(x,y) = k$ está dada pela equação cartesiana

$$\frac{2x^2 + y^2}{2 + 3x^2} = k,$$

que corresponde a todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $2x^2 + y^2 = 2k + 3kx^2$, ou seja

$$(2 - 3k)x^2 + y^2 = 2k. \tag{1}$$

Essa equação descreve uma elipse se e somente se $2 - 3k > 0$ e $2k > 0$. Isto é, $0 < k < \frac{2}{3}$.
Veja que se $k = 0$, a curva de nível correspondente é um único ponto; se $k < 0$, a curva de nível é vazia; se $k = \frac{2}{3}$ obtemos duas retas ($y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$); e, se $k > \frac{2}{3}$, a curva de nível é uma hipérbole.

(b) A equação 1 descreve um círculo somente quando $2 - 3k = 1$, ou seja, quando $k = \frac{1}{3}$. No caso, o círculo tem centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(c) Veja que $f(x,y)$ é sempre maior ou igual a 0, sendo que $f(0,0) = 0$. Ora, fazendo $x = 0$ e variando $y \in \mathbb{R}$, vemos que $f(x,y)$ atinge qualquer valor positivo. Logo, a imagem de f é $[0, \infty)$.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere a curva C parametrizada por

$$r(t) = (e^{-t}\text{sen}\,(2t), e^{-t}\cos(2t), 1 + e^{-t}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

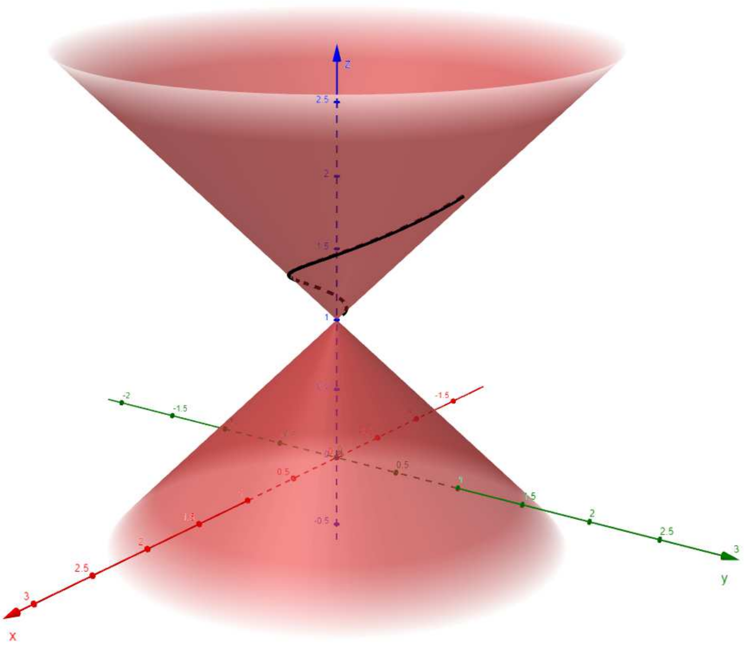
(a) Determine a equação de uma superfície quádrica que contenha completamente a curva C. Identifique e esboce essa superfície.

(b) Calcule o comprimento da curva C.

Solução:

(a) Seja $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (e^{-t}\text{sen}\,(2t), e^{-t}\cos(2t), 1+e^{-t})$, $t \in [0, 2\pi]$. Observamos que, para todo $t \in [0, 2\pi]$, temos $x(t)^2 + y(t)^2 = e^{-2t} = (z(t) - 1)^2$. Logo a curva está contida no cone de equação

$$x^2 + y^2 = (z - 1)^2.$$



(b) O comprimento de arco L está dado por

$$L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt.$$

Calculamos

$$r'(t) = (-e^{-t}\text{sen}\,(2t) + 2e^{-t}\cos(2t)\,,\ -e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\text{sen}\,(2t)\,,\ -e^{-t}).$$

Logo, $\|r'(t)\| = \sqrt{6}\,e^{-t}$ e, então,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{6}\,e^{-t} dt = \sqrt{6}(1 - e^{-2\pi}).$$