TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere uma curva plana parametrizada por $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, passando pelo ponto $(1, \frac{7}{4})$ no instante $t = 0$ e tendo seu vetor tangente satisfazendo a seguinte equação:

$$r'(t) = (y(t), 2y(t) + t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Sabendo que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis, determine as equações paramétricas da curva.

Questão 2: (2.5 pontos)

Sabendo que ele existe, determine as coordenadas do ponto no plano $2x - y + 2z = 20$ mais próximo da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange. (*Observe que o ponto que minimiza a distância $d(x, y, z)$ é o mesmo que minimiza a distância quadrática, isto é,* $[d(x, y, z)]^2$.)

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere a função $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + y^2}{2 + 3x^2}$.

(a) Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a curva de nível $f(x, y) = k$ é uma elipse.

(b) Entre os valores obtidos no ítem acima, determine o valor de k para o qual a curva de nível é um círculo. No caso, determine o centro e o raio do círculo.

(c) Determine a imagem de f.

Questão 4: (2.5 pontos)

Considere a curva C parametrizada por

$$r(t) = (e^{-t}\text{sen}\,(2t), e^{-t}\cos(2t), 1 + e^{-t}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Determine a equação de uma superfície quádrica que contenha completamente a curva C. Identifique e esboce essa superfície.

(b) Calcule o comprimento da curva C.