TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2 pontos)

Para um dado sistema de coordenadas cartesianas xyz, a curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = (t, t, t^2)$, $t \geq 0$, intersecta o cilindro S de equação $x^2 + 2z^2 = 1$ no ponto P. Determine as coordenadas de P e sua distância à origem do sistema de coordenadas.

Solução:

Vemos que $\vec{r}(t_0) \in S$ se $t_0 \geq 0$ é solução de $t^2 + 2t^4 = 1$. Denotanto $\tau = t^2$, temos a equação do segundo grau $2\tau^2 + \tau - 1 = 0$, cujas raízes são: $\tau_1 = -1$ e $\tau_2 = 1/2$. Assim, lembrando que a curva está definida para $t \geq 0$, temos necessariamente $t_0 = \sqrt{\tau_2} = \sqrt{2}/2$. Portanto, a curva intercepta o cilindro $x^2 + 2z^2 = 1$ no ponto

$$P = \vec{r}(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1/2).$$

Por fim, a distância de P até a origem é $\|P\| = \sqrt{(\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{5}/2$.

Questão 2: (2 pontos)

Encontre o ponto de interseção das duas retas tangentes à curva

$$r(t) = (\sin(\pi t), 2\sin(\pi t), \cos(\pi t)), \quad t \in [0, 2],$$

nos pontos em que $t = 0$ e $t = 1/2$.

Solução:

Temos

$$r'(t) = (\pi\cos(\pi t), 2\pi\cos(\pi t), -\pi\sin(\pi t)).$$

Uma equação vetorial da reta tangente à curva r(t) no ponto $t = 0$ é

$$\alpha(t) = r(0) + tr'(0).$$

Segue então

$$\alpha(t) = (0, 0, 1) + t(\pi, 2\pi, 0) = (\pi t, 2\pi t, 1)$$

Do mesmo modo, uma equação vetorial para a reta tangente à curva r(t) no ponto $t = 1/2$ é

$$\beta(t) = r(1/2) + tr'(1/2).$$

Então

$$\beta(t) = (1, 2, 0) + t(0, 0, -\pi) = (1, 2, -\pi t).$$

Se P é um ponto de interseção das retas, então existem t_1 e t_2 tais que

$$P = \alpha(t_1) = \beta(t_2).$$

Igualando coordenada a coordenada da segunda igualdade, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \pi t_1 = 1 \\ 2\pi t_1 = 2 \\ 1 = -\pi t_2 \end{cases}$$

cuja solução é $t_1 = 1/\pi, t_2 = -1/\pi$. O ponto da interseção portanto é P = (1, 2, 1).

Questão 3: (2 pontos)

Considere a superfície S e o plano Σ dados pelas equações $z = 1 - x^2$ e $y + z = 2$, respectivamente. Parametrize a curva C obtida pela interseção de S e Σ e que está localizada acima do plano xy.

Solução:

Os pontos (x, y, z) da interseção de Σ e S satisfazem simultaneamente as equações

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ z = 1 - x^2 \end{cases}$$

Substituindo z na primeira equação, vemos que y pode ser descrito em termos de x também como $y = 1+x^2$. Podemos, portanto, usar x como parâmetro e teremos as equações paramétricas descrevendo a interseção do plano com a superfície dadas por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t^2 \\ z = 1 - t^2, \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, a parte da interseção localizada acima do plano xy deve satisfazer $z \geq 0$. Para isso

$$1 - t^2 \geq 0 \iff -1 \leq t \leq 1.$$

Questão 4: (2 pontos)

Considere um tanque ao qual está sendo adicionada uma solução salina numa certa concentração. Por um furo no fundo do tanque, a solução está saindo bem misturada a uma certa taxa. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (quilogramas) no tanque, passados t minutos, de modo que $y(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{10+t}\,y, \quad t \geq 0.$$

(a) Sabendo que inicialmente o tanque continha apenas água pura, determine a quantidade de sal no tanque em cada instante de tempo t. (Dica: qual o valor de $y(0)$?)

(b) Encontre o instante $t > 0$ no qual tem 10 quilogramas de sal no tanque.

Solução:

(a) Precisamos determinar o valor de $y(t)$, que corresponde à quantidade de sal (em quilogramas) que tem no tanque no instante de tempo $t \geq 0$. A equação satisfeita por y é linear:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{10+t}\,y = 1. \tag{1}$$

O fator integrante para essa equação está dado por

$$I(t) = exp\left(\int \frac{1}{10+t}dt\right) = e^{\ln(10+t)} = 10+t.$$

Multiplicando (1) por $I(t)$ obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left[(10+t)y\right] = 10+t.$$

Assim,

$$(10+t)y(t) = \frac{1}{2}(10+t)^2 + C.$$

Observe que $y(0) = 0$, pois inicialmente o tanque continha apenas água pura. Usando essa condição inicial, obtemos que $C = -\frac{1}{2}(10)^2 = -50$. Logo, em cada instante de tempo t temos que

$$y(t) = \frac{1}{2}(10+t) - \frac{50}{10+t} = \frac{10+t}{2} - \frac{50}{10+t}.$$

(b) Agora precisamos determinar o instante de tempo $t_0 > 0$ no qual $y(t_0) = 10$. Isto é, o instante t_0 em que

$$\frac{10+t_0}{2} - \frac{50}{10+t_0} = 10.$$

Equivalentemente,

$$\frac{(10+t_0)^2 - 100}{2(10+t_0)} = 10,$$

que pode ser reescrito como

$$(10+t_0)^2 - 100 = 20(10+t_0).$$

Ou seja que

$$100 + 20t_0 + t_0^2 - 100 = 200 + 20t_0.$$

Assim, $t_0^2 = 200$ e, portanto, $t_0 = 10\sqrt{2}$ minutos.

Questão 5: (2 pontos)

Determine a abscissa (coordenada x) do ponto de mínimo da solução do PVI formado pela equação diferencial

$$4y'' - 4y' + y = 0,$$

munido com as condições iniciais

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

Solução:

O polinômio característico associado à equação é $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2$, cuja única raíz é $\lambda = 1/2$. Logo, a solução geral da equação é $y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 x e^{x/2}$.

Usando as condições iniciais obtemos que $C_1 = 0$ e $C_2 = 5$. Assim, a solução do PVI é

$$y(x) = 5xe^{x/2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Agora calculamos $y'(x) = 5e^{x/2} + \frac{5}{2}xe^{x/2}$, donde obtemos que o único ponto crítico de $y(x)$ é $x = -2$. Como $y(x)$ tende a infinito, quando x tende a infinito, o único ponto crítico de y tem que ser um ponto de mínimo global (alternativamente, você pode calcular $y''(x) = 5e^{x/2} + \frac{5}{4}xe^{x/2}$, e verificar que $y''(-2) > 0$; mostrando que $x = -2$ é um ponto de mínimo de y).