TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

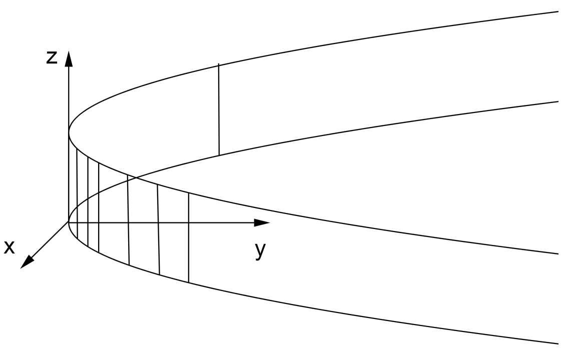
(a) Identifique e faça um esboço da superfcie S_1 no espaço $\mathbb{R}^3$ dada por $x^2 = 2y$.

(b) Parametrize a curva C em $\mathbb{R}^3$ que é interseção das superfícies S_1 e do parabolóide hiperbólico S_2 dado por $3z = xy$.

(c) Encontre o comprimento da curva C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

Solução:

(a) A superfície é um cilindro sobre a parábola $y = x^2/2$.



(b) Primeiramente, parametrizamos a projeção da curva C, sobre o plano xy, a parábola $y = x^2/2$:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \frac{t^2}{2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Depois, usamos a relação $3z = xy$, para obter $z(t) = \dfrac{t \cdot \frac{t^2}{2}}{3}$ e a parametrização de C:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \frac{t^2}{2}, \\ z(t) = \frac{t^3}{6}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Temos

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = t, \\ z'(t) = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Observe que $(x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$ quando $t = 0$ e $(x(t), y(t), z(t)) = (6, 18, 36)$ quando $t = 6$. Logo, o comprimento da curva C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$ é:

$$\begin{aligned} \int_0^6 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt &= \int_0^6 \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}} dt = \int_0^6 \sqrt{\frac{(2+t^2)^2}{4}} dt \\ &= \int_0^6 \frac{(2+t^2)}{2} dt = t + \frac{t^3}{6}\bigg|_0^6 = 42. \quad (1) \end{aligned}$$

Questão 2: (2.5 pontos)
Seja $f(x, y) = ay^2 - 2by\cos x$, onde a e b são constantes reais. Que condições devem satisfazer as constantes a e b para que $(0, 1)$ seja um ponto de mínimo relativo de $f(x, y)$? Justifique.

Solução:

Como $(0, 1)$ é um ponto crítico de f , $f_x(0, 1) = f_y(0, 1) = 0$. Calculando $f_x(x, y) = 2by\text{sen}x$ e $f_y(x, y) = 2ay - 2b\cos x$, vemos que $f_x(0, 1) = 0$ e $f_y(0, 1) = 2a - 2b$. Logo $2a - 2b = 0$, isto é, $a = b$. Como em $(0, 1)$ temos um mínimo relativo, se $A = f_{xx}(0, 1)$, $B = f_{xy}(0, 1)$ e $C = f_{yy}(0, 1)$, temos que ter $AC - B^2 > 0$ e $A > 0$. Calculando $f_{xx}(x, y) = 2by\cos x$, $f_{xy}(x, y) = 2b\,\text{sen}\,x$ e $f_{yy}(x, y) = 2a$, vemos que $A = 2b$, $B = 0$, $C = 2a$. Logo $AC - B^2 = 4a^2 > 0$ e $A = 2a$ tem que ser positivo. Portanto, as constantes a e b tem que ser iguais e positivas.

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja $2x - 3y + z = 1$ a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(3, 2, f(3, 2))$. Se $x(u, v) = u^2 + 2$, $y(u, v) = 2uv$ e $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, calcule $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1, 1)$.

Solução:
Como o plano tangente é dado por $z = 1 - 2x + 3y$, $f_x(3, 2) = -2$ e $f_y(3, 2) = 3$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) &= f_x(x(1,1), y(1,1))x_u(1,1) + f_y(x(1,1), y(1,1))y_u(1,1)\\ &= f_x(3,2)\cdot 2 + f_y(3,2)\cdot 2 = -4 + 6 = 2.\end{aligned}$$

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a solução $y(t)$ do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{aligned}&y'' - 2y' - 8y = 0,\\ &y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 2\pi.\end{aligned}$$

Encontre o limite de $y(t)$ quando $t \to \infty$ em cada um dos casos abaixo:

(a) $\alpha > -\pi$
(b) $\alpha = -\pi$
(c) $\alpha < -\pi$

Solução:
O polinômio característico associado à EDO é $r^2 - 2r - 8 = (r + 2)(r - 4)$ e suas raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = -2$. Assim $y(t)$ é da forma $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{4t}$. Como $y(0) = \alpha = C_1 + C_2$ e $y'(0) = 2\pi = -2C_1 + 4C_2$, então $2\alpha + 2\pi = 2C_2 + 4C_2 = 6C_2$. Logo, $C_2 = \frac{\alpha+\pi}{3}$ e, portanto, $C_1 = \alpha - \frac{\alpha+\pi}{3} = \frac{2\alpha-\pi}{3}$, donde

$$y(t) = \frac{2\alpha - \pi}{3}e^{-2t} + \frac{\alpha + \pi}{3}e^{4t}.$$

Finalmente, note que
(a) Se $\alpha > -\pi$, então $C_2 > 0$ e, no caso, $y(t) \to \infty$,quando $t \to \infty$.
(b) Se $\alpha = -\pi$, então $C_2 = 0$ e, no caso, $y(t) \to 0$,quando $t \to \infty$.
(c) Se $\alpha < -\pi$, então $C_2 < 0$ e, no caso, $y(t) \to -\infty$,quando $t \to \infty$.