Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral 2 2022.1 - MAC128
Gabarito prova segunda chamada unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 02/08

TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Seja $f(x,y) = \sqrt{3x^2 - y^2 - 1}$ e S a superfície do gráfico de $f(x,y)$.

(a) Determine algebricamente e esboce o domínio de $f(x,y)$.

(b) Identifique e faça um esboço da curva de nível de $f(x,y)$ que passa pelo ponto $(3,0)$.

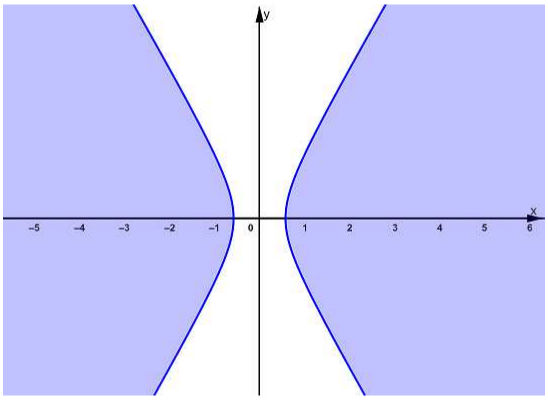
(c) Identifique e esboce a superfície S.

Solução:

(a) Algebricamente o domínio de $f(x,y)$ é

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - y^2 \geq 1\},$$

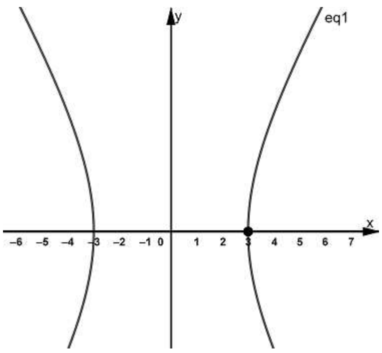
que é a parte à direita e à esquerda dos ramos da hipérbole que corta o eixo x nos pontos $(1/\sqrt{3},0)$ e $(-1/\sqrt{3},0)$, respectivamente.



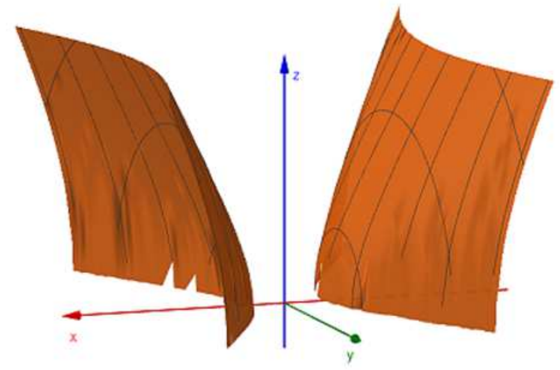
(b) Como $f(3,0) = \sqrt{26}$, a curva de nível que passa pelo ponto $(3,0)$ tem equação

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{27})^2} = 1,$$

que é uma hipérbole que corta o eixo x nos pontos $(3,0)$ e $(-3,0)$.



(c) Podemos reescrever a superfície S como $3x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $z \geq 0$, que é a metade superior de um hiperbolóide de duas folhas que corta o eixo x nos pontos $(1/\sqrt{3},0,0)$ e $(-1/\sqrt{3},0,0)$.



Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$.

(a) Podemos garantir que a função $f(x, y)$ possui máximo absoluto e mínimo absoluto em $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$? Justifique.

(b) Determine o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de f em D, se possível. Justifique.

Solução:

(a) Como D é um subconjunto limitado e fechado do plano e $f(x, y)$ é uma função contínua em D, podemos garantir que f possui máximo absoluto e mínimo absoluto em D.

(b) No interior de D:

Como $f_x = 4x - 4$ e $f_y = 6y$, o único ponto crítico é $(1, 0)$ e $f(1, 0) = -7$.

Na fronteira de D:

Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Se $g(x, y) = x^2 + y^2$, temos que ter $f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$ e $g(x, y) = 16$. Logo, $4x - 4 = \lambda 2x$, $6y = \lambda 2y$ e $x^2 + y^2 = 16$.

Pela segunda equação, temos que $y = 0$ ou $\lambda = 3$. Se $y = 0$, obtemos $x = 4$ ou $x = -4$. Assim temos mais dois pontos candidatos: $(4, 0)$ e $(-4, 0)$, com $f(4, 0) = 11$ e $f(-4, 0) = 43$. Se $\lambda = 3$, então $x = -2$e $y = \pm\sqrt{12}$. Assim temos mais dois pontos candidatos: $(-2, \sqrt{12})$ e $(-2; -\sqrt{12})$, com $f(-2, \sqrt{12}) = 47 = f(-2, -\sqrt{12})$.

Logo o mínimo de f é -7 e o máximo de f é 47.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o Folium de Descartes

$$\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3}\right), \quad t \neq -1.$$

(a) Ache um vetor tangente e um vetor normal ao Folium de Descartes em $t = 1$.

(b) Ache equações paramétricas da reta normal ao Folium de Descartes em $t = 1$.

(c) Esta reta normal passa pela origem? Justifique.

Solução:
(a) Um vetor tangente a uma curva dada por $\alpha(t)$ é o vetor $\alpha'(t)$. Na questão,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}, \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\right).$$

Logo um vetor tangente ao Folium de Descartes em $t=1$ é

$$\alpha'(1) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Um vetor normal a uma curva dada por $\alpha(t)$ é o vetor

$$n(t) = \left(-\left[\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}\right], \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\right),$$

que em $t=1$ fica

$$n(1) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right),$$

(b) Como $\alpha(1) = (3/2, 3/2)$, logo uma parametrização da reta normal é dada por

$$\beta(t) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + t\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

e as equações paramétricas da reta normal ao Folium de Descartes em $t=1$ são:

$$x(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}t, \quad y(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Sim, pois $x(t) = y(t) = 0$ quando $t = 2$.
OU
Sim, pois a equação cartesiana da reta normal é $y = x$.

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a superfície S dada pela equação $x + 2 = xy^2 + zx$. Se o vetor $v = (a, b, c)$ é tangente a S em $(1,1,2)$, mostre que $2a + 2b + c = 0$.

Solução:
Seja $f(x,y,z) = xy^2 + zx - x - 2$. Como a superfície S é dada por $f(x,y,z) = 0$, o vetor $\nabla f(1,1,2)$ é normal a S em $(1,1,2)$. Temos

$$\nabla f(x,y,z) = (y^2 + z - 1, 2xy, x),$$
$$\nabla f(1,1,2) = (2,2,1).$$

Portanto, $(2,2,1)\cdot(a,b,c) = 0$, isto é, $2a + 2b + c = 0$.