Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral 2 2022.1 - MAC128
Gabarito segunda prova unificada - Escola Politécnica / Escola de Química - 12/07/202

TEMPO DE PROVA: 2h

Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (2.5 pontos)

Considere as funções $g(x,y) = \dfrac{xy^4}{x^2+y^8}$, $h(x,y) = \dfrac{x(y-1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ e $f(x,y) = g(x,y)+h(x,y)$.

(a) Determine se existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. Justifique.

(b) Sabendo que existe, calcule o valor do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} h(x,y)$.

(c) Encontre o valor de a de modo que, definindo $f(1,1)=a$, a função f seja contínua em $(1,1)$. Justifique.

Solução:

(a) Ao longo do caminho $x=y$ obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{xy^4}{x^2+y^8} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^2(1+x^6)} = 0.$$

Por outro lado, ao longo do caminho $x=y^4$ obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^4}} \frac{xy^4}{x^2+y^8} = \lim_{y\to 0}\frac{y^8}{2y^8} = \frac{1}{2}.$$

Logo, o limite não existe.

(b) Ao longo do caminho $x=y$ obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x=y}} \frac{x(y-1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2+(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)^2}{2(x-1)^2} = 1.$$

Assim, o candidato a limite é $L=1$. Para mostrar que o limite de fato existe e é igual a 1, basta mostrar que $\lim_{(x,y)\to(1,1)}(h(x,y)-1)=0$. Ora,

$$h(x,y)-1 = \frac{x(y-1)^2+(x-1)^2-(x-1)^2-(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Definindo $F(x,y) = \frac{(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ e $G(x,y)=(x-1)$ temos que F é limitada ($0\le F(x,y)\le 1$) e $\lim_{(x,y)\to(1,1)} G(x,y)=0$. Assim, pelo teorema do confronto, temos que $\lim_{(x,y)\to(1,1)}(h(x,y)-1) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} F(x,y)G(x,y) = 0$, mostrando que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} h(x,y) = 1$.

(c) Para que f seja contínua em $(1,1)$, precisamos que

$$a = \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) + \lim_{(x,y)\to(1,1)} h(x,y).$$

Por uma parte, temos que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = g(1,1) = \frac{1}{2}$. Por outro lado, temos que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} h(x,y) = 1$. Assim, $a = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a função $f(x,y) = e^{x^2-xy+y^2}$.

(a) Indique a direção que determina a maior taxa de crescimento de f no ponto $(1,0)$. Qual é o valor dessa taxa?

(b) Calcule a derivada direcional de f na direção $(1,1)$ no ponto $(1,0)$.

(c) Considere a curva $r(t) = (1,0) + \dfrac{t}{\sqrt{2}}(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$, e a função composta $g(t) = f(r(t))$. Calcule $g'(0)$.

Solução:

Para o item (a), a direção de maior crescimento de f no ponto $(1,0)$ é o vetor gradiente $\nabla f(1,0)$. Assim, $\nabla f(x,y) = e^{x^2-xy+y^2}(2x-y,-x+2y)$ e logo $\nabla f(1,0) = e^1(2,-1)$.
O valor da taxa máxima de crescimento de f no ponto $(1,0)$ é $\|\nabla f(1,0)\| = e\sqrt{5}$.
Para o item (b), $u = (1,1)$ e logo $\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = e^1(2,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{e}{\sqrt{2}}$.
Para o item (c), pela regra da cadeia $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$. Logo, $g'(0) = \nabla f(r(0)) \cdot r'(0) = \nabla f(1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{e}{\sqrt{2}}$. Esta é outra maneira de calcular a derivada direcional do item ii) já que a curva $r(t)$, em $t=0$, passa por $(1,0)$ e tem vetor velocidade unitário $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Dada a superfície de equação $ax^2 - bxy + \cos(z^3) - e^z = 0$, para quais valores positivos de a e b o seu plano tangente no ponto $P_0 = (b,a,0)$ é paralelo ao plano $x - 2y - z = 1$.

Solução:

A superfície definida pela equação acima é uma superfície de nível da função $F(x,y,z) = ax^2 - bxy + \cos(z^3) - e^z$. Como $F(P_0) = 0$ e

$$\nabla F(x,y,z) = \left(2ax - by, -bx, -3z^2 \operatorname{sen}\left(z^3\right) - e^z\right) \implies \nabla F(P_0) = (ab, -b^2, -1),$$

segue que o plano tangente à superfície de nível em P_0 é paralelo ao plano $x - 2y - z = 1$ se e somente se $\nabla F(P_0)$ é paralelo à $\vec{\mathbf{n}} = (1,-2,-1)$, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(ab, -b^2, -1) = \lambda(1,-2,-1)$. Comparando as componentes, obtemos que $\lambda = 1$, $ab = 1$ e $-b^2 = -2$. Dessa forma os valores possíveis de a e b são,

$$b^2 = 2 \implies b = \sqrt{2} \implies a = \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 4: (2.5 pontos)

Desejamos fabricar um cilindro circular reto de raio r e altura h. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontre o volume máximo do cilindro quando sua área (incluindo as duas tampas) é de 20 unidades de área.

Dica: Lembre que a área lateral de um cilindro circular reto de raio r e altura h é $2\pi rh$, e o volume é $\pi r^2 h$.

Solução:

O volume do cilindro é $V(r,h) = \pi r^2 h$. A área lateral do cilindro é $2\pi rh$, e incluindo ambas 'tampas', a restrição de área está dada pela função $g(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - 20 = 0$. Temos que $\nabla g(r,h) = (2\pi h + 4\pi r, 2\pi r)$ que só se anula em $(0,0)$, mas esse ponto está fora da curva $g(r,h) = 0$.

Pelo método de multiplicadores de Lagrange, procuramos pontos (x,y) que verificam a restrição e tais que $\nabla V(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0$. Logo temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 2\pi rh + \lambda(2\pi h + 4\pi r) = 0 \\ \pi r^2 + \lambda(2\pi r) = 0 \\ 2\pi rh + 2\pi r^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação se obtém $r = 0$ (incompatível com a terceira equação) ou $\lambda = -\frac{r}{2}$. Substituindo na primeira equação obtemos $\pi rh - 2\pi r^2 = 0$, ou seja $r = 0$ (descartado) ou $2r = h$. Substituindo na terceira equação temos $6\pi r^2 = 20$, ou seja $r = \sqrt{\frac{10}{3\pi}}$. Logo $h = 2\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$ e o volume máximo é $\frac{20}{3}\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$.