TEMPO DE PROVA: 2h

As questões 1 a 3 são discursivas. Justifique todas as suas respostas e apresente seus cálculos.

Questão 1: (1.5 ponto)

Uma partícula se move sobre o gráfico da equação $y = ln(x)$, com $x > 0$, e tem velocidade horizontal $x'(t) = t\,e^t$, $t > 0$. Sabendo que para $t = 1$, a partícula passa pelo ponto $(1, 0)$, encontre a posição $r(t) = (x(t), y(t))$ da partícula, e o vetor velocidade no tempo $t = 1$.

Solução:

Integrando por partes a velocidade horizontal $x'(t)$:

$$x(t) = \int t\,e^t dt = e^t(t-1) + C.$$

Para $t = 1$, $x(1) = 1$, logo $C = 1$. Usando a equação $y = ln(x)$, tem-se:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (e^t(t-1) + 1, ln(e^t(t-1) + 1)) \quad t > 0.$$

Pelo dado do enunciado, $x'(1) = e^1 = e$. Usando de novo $y = ln(x)$, $y'(t) = \frac{1}{x(t)}x'(t)$, e assim $y'(1) = e$. Assim o vetor velocidade to tempo $t = 1$ é $r'(1) = (x'(1), y'(1)) = (e, e)$.

Questão 2: (1.5 ponto)

Seja $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$. Identifique e esboce todas as curvas de nível $z = c$. Para quais valores de c temos que a curva de nível correspondente é não vazia?

Solução:

Se $c = 0$, a curva de nível $f(x, y) = 0$ é a reta $y = -x$.

Se $c \neq 0$, a equação

$$\frac{x+y}{x^2+y^2+1} = c$$

é equivalente a $\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{2c^2} - 1$. Assim, para valores de c tais que $0 < |c| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (que corresponde aos valores de c nos quais $\frac{1}{2c^2} - 1 > 0$), a curva de nível $f(x, y) = c$ é um círculo centrado em $\left(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}\right)$ com raio $\sqrt{\frac{1}{2c^2} - 1}$. Se $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, a curva de nível $f(x, y) = c$ é um único ponto: $\left(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}\right)$.

Finalmente, se $|c| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ a curva de nível correspondente é vazía.

Questão 3: (2 pontos)

Dadas as superfícies S_1 e S_2 de equações $3x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ e $y = z^2 - 1$, respectivamente, obtenha uma parametrização da curva $\mathcal{C}$ formada pela interseção de S_1 com S_2 e que está localizada acima do plano $z = 0$.

Solução:
A curva $\mathcal{C}$ satisfaz

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4z^2 = 1 \\ y = z^2 - 1 \end{cases} \implies 1 + 4y = \left(3x^2 + y^2 - 4z^2\right) + 4 \cdot \left(z^2 - 1\right)$$

$$\implies 3x^2 + y^2 - 4y = 5$$

$$\implies 3x^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$\implies \frac{x^2}{3} + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1.$$

Portanto, a projeção de $\mathcal{C}$ no plano $z = 0$ é uma elipse de parametrização $x(t) = \sqrt{3}\cos t$ e $y(t) = 2 + 3\operatorname{sen} t$, com $t \in [0, 2\pi]$. Como $y = z^2 - 1$ e $z \geq 0$, temos que $z(t) = \sqrt{y(t) + 1} = \sqrt{3 + 3\operatorname{sen} t} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sen} t}$.

As questões 4 a 8 são de múltipla escolha. Utilize a quarta folha do caderno de prova para colocar as respostas das questões 4 a 8. Escreva a letra selecionada e também o número ou fórmula correspondente.

Questão 4: (1 ponto)
A solução da equação diferencial $y' = -\dfrac{y}{x}$, com $x > 0$, e que passa pelo ponto $(1, 2)$ verifica:

(a) $y(x) = \frac{1}{x} + 1$
(b) $y(x) = 2x$
(c) Nenhuma das opções
(d) $y(x) = 2e^{-2x+2}$
(e) $y(x)$ é decrescente em $(0, \infty)$

Solução:
(e) $y(x)$ é decrescente em $(0, \infty)$

Questão 5: (1 ponto)
Considere o problema de valor inicial $ty' + 2y = 4t^2,\ y(1) = 2$. O valor de $y(2)$ é igual a

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{13}{4}$
(c) $\frac{11}{2}$
(d) $\frac{17}{4}$
(e) -1

Solução:
(d) $\frac{17}{4}$

Questão 6: (1 ponto)
Considere a função $y(t) = -e^{-2t} \ln t$, $t > 0$. Qual das seguintes equações é satisfeita pela função y?

(a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-2t}}{t^2} - \frac{e^{-2t}}{t}$

(b) $y'' + 4y' + 4y = \frac{-e^{-2t}}{t^2}$

(c) $y'' + y' - 2y = \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{3e^{-2t}}{t}$

(d) $y'' + 7y' + 10y = \frac{-e^{-2t}}{t^2} + \frac{3e^{-2t}}{t}$

(e) $y'' + 5y' + 6y = \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{e^{-2t}}{t}$

Solução:
(c) $y'' + y' - 2y = \frac{e^{-2t}}{t^2} + \frac{3e^{-2t}}{t}$

Questão 7: (1 ponto)
Considere a reta L no espaço $\mathbb{R}^3$ parametrizada pelas função vetorial $r(t) = (1+t, 2, 5+t)$, $t \in \mathbb{R}$. Qual das seguintes equações descreve um plano que não intersecta a reta acima?

(a) $-4x + 2y + 3z = 0$

(b) $-x - 2y + z = 0$

(c) $2x - 2y - 2z = 0$

(d) $2x - 3y + 4z = 0$

(e) Nenhuma das opções

Solução:
(c) $2x - 2y - 2z = 0$

Questão 8: (1 ponto)
Considere a curva parametrizada por $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. O comprimento de arco entre os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ é igual a

(a) $\frac{1}{4}$

(b) 1

(c) Nenhuma das opções

(d) $\frac{3}{2}$

(e) $\frac{5}{2}$

Solução:
(d) $\frac{3}{2}$