Todas as respostas deverão ser devidamente justificadas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Questão 1: (1.5 ponto)

Determine $y = y(t)$ solução geral da equação

$$y'' + 6y' + 9y = 0,$$

e calcule $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Solução:

A equação característica dessa EDO é

$$r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2 = 0,$$

e a raíz (dupla) é $r = -3$. A solução geral da EDO é, portanto,

$$y = y(t) = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}.$$

Calculemos o limite quando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} = \lim_{t\to+\infty} c_1e^{-3t} + \lim_{t\to+\infty} c_2te^{-3t} = 0,$$

onde o segundo limite deve ser calculado usando a regra de l'Hôpital. A justificativa para o primeiro limite é que a função exponencial tende a zero em $-$infinito.

Questão 2: (1.5 ponto)

Considere $P(t)$ uma população de cardume de peixes em certo lago, medida em centenas de milhares de peixes em t anos. Os peixes são *pescados com certa frequência* e dada suas taxas de reprodução, as populações evoluem de acordo com

$$P' = P(10 - P) - 25.$$

(a) Notando que $P(10-P)-25 = -(P-5)^2$, qual a população crítica que este modelo nos fornece, ou seja, qual constante C é tal que $P(t) \equiv C$ é solução da equação acima?

(b) Sabendo que $P(0) = 3$ (trezentos mil peixes), calcule quantos anos T teremos até a extinção dos peixes neste lago, ou seja, $P(T) = 0$.

Solução:

(a) A população crítica que este modelo nos fornece é 500000 (quinhentos mil) peixes pois $P(t) \equiv 5$ satisfaz

$$P' = 0 = -(5 - 5)^2.$$

(b) A equaçõ é separável e pode ser escrita como

$$\frac{P'}{(P - 5)^2} = 1.$$

Após inserir a condição $P(0) = 3$ obtemos

$$\frac{1}{P-5} = t - \frac{1}{2},$$

logo

$$P(t) = \frac{3-10t}{1-2t}.$$

Portanto, se $T = 3/10$ então $P(3/10) = 0$.

A população de peixes estará extinta em $T = 3/10$ de ano.

Questão 3: (1.5 ponto)

Determine a equação de um elipsóide que passe pelo ponto $(0, 1, \sqrt{6})$ e intersecte o plano $\{z = 0\}$, na elipse $x^2 + y^2/4 = 1$.

Solução:

Uma equação de elipsóide é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Fazendo $z = 0$ obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

logo escolhemos $a = 1$ e $b = 2$.

Substituindo $(0, 1, \sqrt{6})$ na equação para o elipsóide vem

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{6}{c^2} = 1.$$

Consequentemente $c^2 = 8$.

A equação de um elipsóide como solicitado é

$$x^2 + y^2/4 + z^2/8 = 1.$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 9 - \sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \le 4 \\ b\ , & 4 < x^2+y^2 \le 16 \end{cases}$$

(a) Determine o valor de b para que a função $f(x,y)$ seja contínua no ponto $(0,2)$;

(b) Faça o esboço do gráfico de $f(x,y)$ para b encontrado no item (a).

(c) Mostre que não existe $f_y(0,2)$.

(d) A função $f(x,y)$ é diferenciável em $(0,2)$?

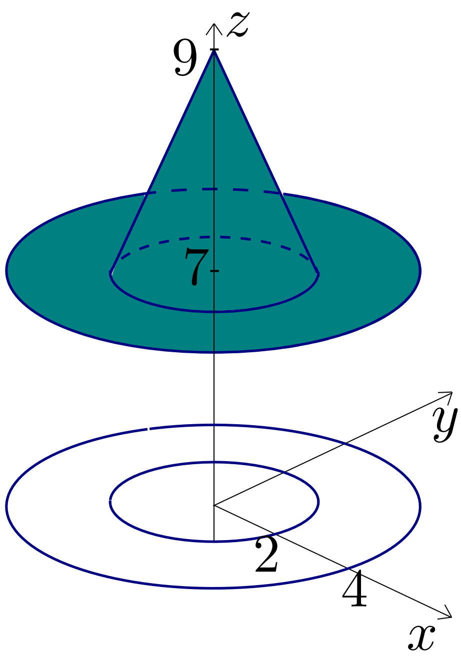
Solução:

(a) Para que a função seja contínua em $(0,2)$, devemos ter que

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = f(0,2) = 9\sqrt{0^2+2^2} = 7.$$

Ao nos aproximarmos de $(0,2)$ dentro da região $4 < x^2+y^2 \leq 16$, vemos que se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$ este tem de ser b. Portanto temos que ter $b = 7$.

(b) Esboço do gráfico



(c) Considere

$$F(y) = f(0,y) = \begin{cases} 9-\sqrt{y^2}, & y^2 \leq 4 \\ 7\ , & 4 < y^2 \leq 16 \end{cases} .$$

Pela definição da derivada parcial, onde fazemos a coordenada x constante igua a 0, a existência de $f_y(0,2)$ é equivalente à de $F'(2)$. Mas $F'(2^+) = 0$, pois $F(y) \equiv 7$ se $2 < y \leq 4$, e

$$F'(2^-) = -\frac{y}{\sqrt{y^2}}\,|_{y=2} = -1,$$

uma vez que $F(y) = 9-\sqrt{y^2}$ se $-2 \leq y \leq 2$.

Como $0 = F'(2^+) \neq F'(2^-) = -1$, temos que $\nexists F'(2)$ e então $\nexists f_y(0,2)$.

(d) A função $f(x,y)$ **não** é diferenciável em $(0,2)$, pois **não existe** $f_y(0,2)$.

Questão 5: (1.5 ponto)

Seja $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

(a) Determine a aproximação linear $L(x,y)$ de f no ponto $(1,1)$.

(b) Avalie $L(1.01, 0.99)$ para assim calcular um valor aproximado de $e^{(1.01)^2-(0.99)^2}$.

Solução:

(a) Temos que

$$L(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1),$$

$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2} \quad , \quad f_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}.$$

Portanto,

$$f(1,1) = e^0 = 1 \quad , \quad f_x(1,1) = 2 \quad , \quad f_y(1,1) = -2,$$

e

$$L(x,y) = 1 + 2(x-1) - 2(y-1) = 1 + 2(x-y).$$

(b) Avalie $L(1.01, 0.99)$ para assim calcular um valor aproximado de $e^{(1.01)^2-(0.99)^2}$.

Temos então

$$L(1.01, 0.99) = 1 + 2(1.01 - 0.99) = 1 + 2 \cdot 0.02 = 1.04$$

Questão 6: (2.0 pontos)

Determine os valores e os respectivos pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y) = x^2y^2$ restrita à elipse $x^2 + 4y^2 = 8$.

Solução:

Os quatro pontos $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{2})$ são pontos de mínimo local, onde $f = 0$, e os quatro pontos $(\pm 2, \pm 1)$ são pontos de máximo local, onde $f = 4$.

De fato, usando multiplicadores de Lagrange com a restrição $\Phi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 = 0$, precisamos resolver o sistema

$$\nabla f = \lambda \nabla \Phi,$$

$$\Phi = 0.$$

Isso nos leva ao sistema de três equações

$$\begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 8. \end{cases}$$

Se $x = 0$, então $\lambda = 0$ e $y^2 = 2$, o que nos leva às soluções $(0, \pm\sqrt{2})$. Se $y = 0$, então $\lambda = 0$ e $x^2 = 8$, o que nos leva às soluções $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$. Nesses quatro pontos, temos $f = 0$. São pontos de mínimo porque $f \geq 0$ sempre. Se $x, y \neq 0$, então o sistema simplifica para $y^2 = \lambda$, $x^2 = 4\lambda$, $x^2 + 4y^2 = 8$. Substituindo na última equação, temos $4\lambda + 4\lambda = 8$, o seja, $\lambda = 1$, $y^2 = 1$ e $x^2 = 4$. Isso nos dá os quatro pontos críticos $(\pm 2, \pm 1)$. Nesses quatro pontos, $f = x^2 y^2 = 4$. Como não há nenhum outro ponto crítico, pois já encontramos todas as soluções das equações de Lagrange, e a restrição é um conjunto fechado e limitado, então esses são, necessariamente, pontos de máximo.