**Todas as respostas deverão ser devidamente justificadas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.**

**Questão 1:** (1.5 ponto)
Considere um tanque contendo inicialmente 80 litros de uma solução com 125 gramas de soluto. Entram, no tanque, 2 litros por minuto de água pura e sai 1 litro por minuto da solução homogeneizada. Qual é o volume da solução no tanque e qual é a massa do soluto no instante em que solução alcança uma concentração de 1 grama por litro dentro do tanque?

**Solução:**

No instante em questão, o volume é de 100 litros e a massa do soluto é de 100g. De fato, seja $V(t)$ o volume da solução no tanque em litros e seja $m(t)$ a massa de soluto no tanque em gramas, onde $t$ indica o instante de tempo, em minutos. Considerando $t = 0$ como o instante inicial, temos $V(0) = 80$ litros. Esse volume cresce a uma taxa temporal de $V'(t) = 1$ litro por minuto, que é a diferença entre o fluxo de entrada e o fluxo de saída. Assim, o volume ao longo do tempo é dado por $V(t) = 80 + t$ litros. A massa de soluto inicialmente é de 125 gramas, i.e. $m(0) = 125$, e ela decresce de acordo com a taxa $m'(t) = -m(t)/V(t)$ gramas por minuto, já que $m/V$ é a concentração em gramas por litro e o fluxo de saída é de 1 litro por minuto. A solução geral da equação separável $dm/dt = -m/(80 + t)$ é $m(t) = C/(80 + t)$.

De fato, fazemos:

$$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{-dt}{80+t}$$

Como $m > 0$ e $80 + t > 0$, pois $t \geq 0$,

$$\ln(m) = -\ln(80 + t) + D = \ln(80 + t)^{-1} + D$$

$$m(t) = e^{\ln(80+t)^{-1}+D} = e^D e^{\ln(80+t)^{-1}} = \frac{e^D}{80+t}.$$

Reescrevemos $C = e^D$.

**Observação:** podemos resolver poe fator integrante também.

Com a condição inicial $m(0) = 125$, chegamos a $m(t) = 10000/(80 + t)$. A concentração ao longo do tempo é $c(t) = m(t)/V(t) = 10000/(80 + t)^2$. Essa concentração é igual a 1 grama por litro quando $100 = 80 + t$, ou seja, $t = 20$. Nesse instante, $V(20) = 100$ litros e $m(20) = 100$ gramas.

**Questão 2:** (1.5 ponto)
Considere a curva abaixo, descrita como interseção de duas superfícies:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ \\ z = e^{4x^2-9y^2}. \end{cases}$$

Determine uma parametrização para esta curva que inicie no ponto $A = \left(\frac{1}{2}, 0, e\right)$ e termine no ponto $B = \left(-\frac{1}{2}, 0, e\right)$.

**Solução:**

Como $(2x)^2 + (3y)^2 = 1$, podemos fazer

$$x = \frac{\cos t}{2} \quad , \quad y = \frac{\operatorname{sen} t}{3} \quad \text{e} \quad z = e^{\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t}.$$

Como a curva inicia no ponto $A = (\frac{1}{2}, 0, e)$ e termina no ponto $B = (-\frac{1}{2}, 0, e)$, podemos tomar $t \in [0, \pi]$.

**Questão 3:** (1.5 ponto)

Considere a região $\Omega$ limitada pelas superfícies $\mathcal{S}_1 : \; z^2 = 2(x^2 + y^2)$ e $\mathcal{S}_2 : \; z^2 - x^2 - y^2 = 1$, com $z \geq 0$. Descreva a curva definida pela interseção de $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, para $z \geq 0$, e faça um esboço da região $\Omega$.

**Solução:**

Para determinar a curva $\mathcal{C}$ de interseção de $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ devem valer, ao mesmo tempo,

$$z^2 = 2(x^2 + y^2) \quad \text{e}$$

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Assim, temos

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2}, \qquad \text{e portanto} \quad 1 = z^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}.$$

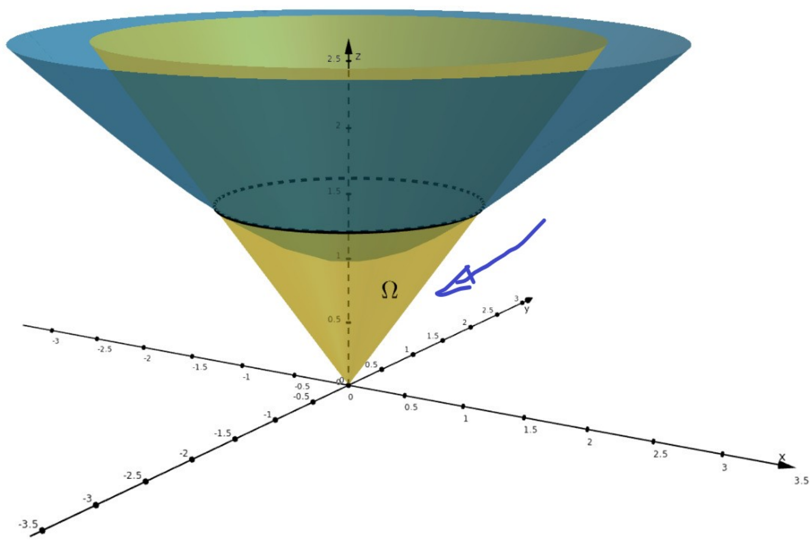
Como $z \geq 0$ vem $z = \sqrt{2}$. Donde $x^2 + y^2 = 1$.

Concluimos que

$$\mathcal{C} : (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

é a parametrização procurada.

A região $\Omega$ é a região entre um cone e um hiperbolóide, no semi-espaço $\{z \geq 0\}$, como pode ser verificado no esboço abaixo:



**Questão 4:** (2.0 pontos)

Determine os valores de máximos e mínimos de $F(x, y, z) = x^2 - 2x + 3y^2 + 5z^2$ restrita à bola de raio 2: $c(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

**Solução:**

Pontos críticos de $F$:

$$F_x = 2x - 2 = 0 \ , \ F_y = 6y = 0 \ , \ F_z = 10z = 0$$

Único ponto crítico é

$$(1, 0, 0)$$

que está no interior da bola de raio 2, pois

$$(1)^2 + 0^2 + 0^2 < 4.$$

Analizemos os pontos na fronteira da bola, onde

$$c(x, y, z) = z^2 + x^2 + y^2 = 4.$$

Usando Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla F = (2x - 2, 6y, 10z) = \lambda \nabla c = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

Temos:

i) $x - 1 = \lambda x$

ii) $3y = \lambda y$

iii) $5z = \lambda z$

iv) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

**Caso** $y \neq 0$, por ii) e iii):

$$\lambda = 3 \Rightarrow z = 0$$

Por i):

$$x - 1 = 3x$$

$$2x = -1 \iff x = -1/2$$

Por iv):

$$(-1/2)^2 + y^2 + 0^2 = 4 \iff y = \pm\sqrt{15}/2$$

Temos então os pontos

$$(-1/2, \sqrt{15}/2, 0)\ ,\ (-1/2, -\sqrt{15}/2, 0)$$

**Caso** $y = 0$:

**Subcaso** $z \neq 0$:, por iii):

$$\lambda = 5$$

Por i):

$$x - 1 = 5x$$

$$4x = -1 \iff x = -1/4$$

Por iv):

$$(-1/4)^2 + 0^2 + z^2 = 4 \iff z = \pm\sqrt{63}/4$$

Temos 2 pontos:

$$(-1/4, 0, \sqrt{63}/4)\ ,\ (-1/4, 0, -\sqrt{63}/4)$$

**Subcaso** $z = 0$: Por iv)

$$x^2 = 4$$

Temos 2 pontos:

$$(2, 0, 0)\ ,\ (-2, 0, 0)$$

Comparando os valores de $F$ nos pontos encontrados:

$$F(1, 0, 0) = 1 - 2 = -1$$

$$F(-1/2, \pm\sqrt{15}/2, 0) = 1/4 + 1 + 45/4 = 50/4 = 25/2$$
$$F(-1/4, 0, \pm\sqrt{63}/4) = 1/16 + 1/2 + 5 \cdot 63/16 = (9 + 315)/16 = 324/16 = 81/4 > 80/4 = 20$$

$$F(2, 0, 0) = 4 - 4 = 0,\ F(-2, 0, 0, ) = 4 + 4 = 8$$

Portanto o máximo é $81/4$ atingido nos pontos $(-1/4, 0, \pm\sqrt{63}/4)$ e o mínimo é $-1$ atingido em $(1, 0, 0)$.

**Questão 5:** (1.5 ponto)

Encontre a equação do plano tangente ao hiperbolóide $z^2 - x^2 - y^2 = 2$ em $(1, 1, 2)$. Determine se ele é paralelo ao plano $x + y - 2z = 0$, e caso não seja, calcule o ângulo entre estes planos.

**Solução:**

O hiperbolóide é curva de nível 2 de $g(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$. Seu plano tangente em $(1, 1, 2)$ é, portanto, ortogonal a $\nabla g(1, 1, 2)$.

$$\nabla g(x, y, z) = (-2x, -2y, 2z);$$

$$\nabla g(1, 1, 2) = (-2, -2, 4).$$

Portanto a equação do plano tangente é:

$$\nabla g(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = -2(x - 1) - 2(y - 1) + 4(z - 2) = 0$$

Temos que $(1, 1, -2)$ é uma normal ao plano $x + y - 2z = 0$. Ademais, $\nabla g(1, 1, 2)$, que é uma normal para o plano tangente ao hiperbolóide $z^2 - x^2 - y^2 = 2$ em $(1, 1, 2)$, é múltiplo de $(1, 1, -2)$. De fato,

$$\nabla g(1, 1, 2) = (-2, -2, 4) = -2(1, 1, -2).$$

Portanto os planos são paralelos.

**Extra:** Note que podemos reescrever a equação do plano tangente como

$$(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 2) = 0$$

ou

$$x + y - 2z = -2.$$

Daí vemos claramente que este é paralelo ao plano $x + y - 2z = 0$.

**Questão 6:** (2.0 pontos)

Determine os valores de máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função

$$f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 10.$$

**Solução:**

Calculamos os pontos críticos de $f(x, y)$:

$$f_x = 6x^2 - 3y = 0 \quad , \quad f_y = 6y^2 - 3x = 0$$

Daí,

$$y = 2x^2 \quad , \quad x = 2y^2$$

Então,

$$y = 8y^4$$

Pornanto, $y = 0$ ou $y^3 = 1/8 \iff y = 1/2$.
Ou seja, os pontos críticos são:

$$(0,0) \text{ e } (1/2, 1/2)$$

Calculamos:

$$f_{xx} = 12x \quad , \quad f_{xy} = -3 \quad , \quad f_{yy} = 12y$$

Então temos

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144xy - 9$$

Como $D(0,0) = -9 < 0$ temos que $(0,0)$ é ponto de sela.
Como $D(1/2,1/2) = 36 - 9 = 25 > 0$ e $f_{xx}(1/2,1/2) = 6 > 0$, temos que $(1/2,1/2)$ é ponto de mínimo local.