Questão 1: (1.5 ponto)

Considere a função de duas variáveis:

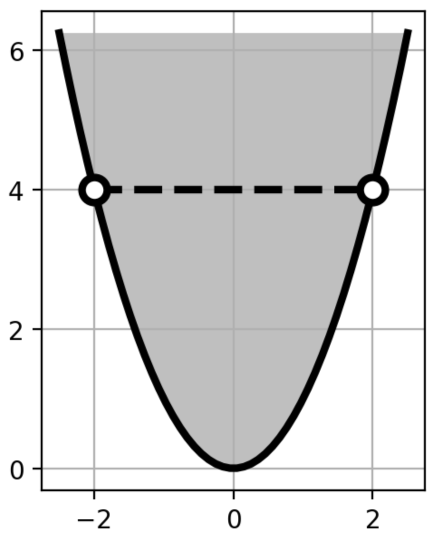
$$f = f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{y - 4}$$

1. Qual é o domínio dessa função? Descreva-o algebricamente e também faça um esboço.
2. Calcule, se existir, o limite abaixo. Caso não exista, justifique.

$$\lim_{(x,y)\to(2,4)} f(x, y).$$

Solução:

Para que um ponto (x, y) pertença ao domínio, precisamos que o radicando $y - x^2$ seja não-negativo, e portanto $y \geq x^2$, e além disso que o denominador $y - 4$ seja não-nulo, ou seja $y \neq 4$. O domínio é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, y \neq 4\}$. Esboço: o domínio é a região hachurada, incluindo os trechos da parábola com linha cheia (pontos (x, y) tais que $y = x^2$), e excluindo o segmento de reta pontilhado (no qual $y = 4$).



Quanto ao limite, observamos que:

- O limite ao longo da parábola $y = x^2$ é $\lim \sqrt{0}/(y - 4) = \lim 0 = 0$.
- O limite ao longo da semi-reta vertical $\{y > 4, x = 2\}$ é $\lim \sqrt{y - 2^2}/(y - 4) = \lim 1/\sqrt{y - 4}$. Como $y \to 4$, temos $\lim 1/\sqrt{y - 4} = +\infty$.

Como o limite ao longo de uma curva é 0 mas o limite ao longo de outra curva é $+\infty$, o limite não existe.

Questão 2: (1.5 ponto)
Seja $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2 + y^2$.

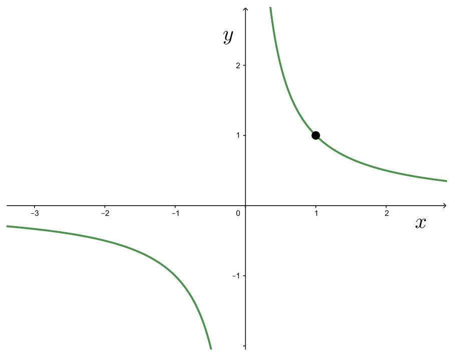
(a) Determine e esboce a curva de nível de f que passe pelo ponto $(1,1)$.

(b) Determine e esboce a curva de nível de g que passe pelo ponto $(1,1)$.

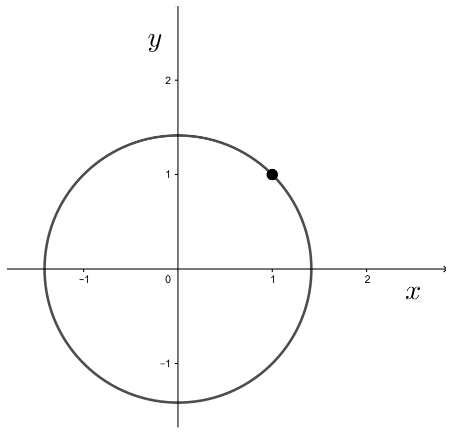
(c) A afirmação: "As curvas de nível de f e g dos itens anteriores são ortogonais no ponto $(1,1)$" é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Como $f(1,1) = 1$, a equação da curva de nível é $f(x,y) = 1$, isto é, a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$.



(b) Como $g(1,1) = 2$, a equação da curva de nível é $g(x,y) = 2$, isto é, o círculo $x^2 + y^2 = 2$, centrado na origem com raio $\sqrt{2}$.



(c) Um vetor normal à curva de nível de f é $\nabla f = (y, x)$, que no ponto $(1,1)$ é $(1,1)$.
Um vetor normal à curva de nível de g é $\nabla g = (2x, 2y)$, que no ponto $(1,1)$ é $(2,2)$.
Como o produto escalar de $(1,1)$ e $(2,2)$ é igual a $4 \neq 0$, então as curvas não são ortogonais.

Questão 3: (1.5 ponto)
A temperatura em certo ambiente é modelada por $T(x,y,z) = e^{y-1}\,\mathrm{sen}(xz) + \ln(1+y^2z^6)$ em Kelvin.

(a) Considerando direções unitárias, qual a maior taxa de resfriamento, ou seja, a taxa de variação mais negativa da temperatura no ponto $(0,1,1)$?

(b) Uma andorinha move-se na trajetória $c(t) = (-5t, \cos(t), e^{-t})$, onde t denota o tempo. Qual a taxa de variação da temperatura sentida pela andorinha quando ela passa por $(0,1,1)$?

(c) O valor encontrado no item (b) é menor (mais negativo) que o encontrado no item (a). Porque isso não contradiz o fato de a taxa de variação no item (a) ser a de maior resfriamento?

Solução:

(a) Temos que

$$\nabla T(x,y,z) = \left(ze^{y-1}\cos(xz)\ ;\ e^{y-1}\,\mathrm{sen}(xz) + \frac{2yz^6}{1+y^2z^6}\ ;\ xe^{y-1}\cos(xz) + \frac{6y^2z^5}{1+y^2z^6} \right)$$

Daí,

$$\nabla T(0,1,1) = (1,1,3)$$

A maior taxa de resfriamento é

$$-||\nabla T(0,1,1)|| = -\sqrt{1^2+1^2+3^2} = -\sqrt{11}$$

.

(b) A andorinha passa por $(0,1,1) = c(0)$, quando $t = 0$.
A temperatura sentida pela andorinha é $T(c(t))$, cuja variação pela regra da cadeia é

$$\frac{dT(c(t))}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla T_{(x(t),y(t),z(t))} \cdot c'(t)$$

Temos, $c'(t) = (-5, -\,\mathrm{sen}(t), -e^{-t})$, e portanto $c'(0) = (-5,0,-1)$.
Então a variação de temperatura sentida pela andorinha é a variação da temperatura correspondente a $c'(0) = (-5,0,-1)$, ou seja, é

$$\frac{dT(c(t))}{dt}_{|t=0} = \nabla T(0,1,1)\cdot c'(0) = (1,1,3)\cdot(-5,0,-1) = -5-3 = -8$$

(c) De fato, $-8 < -\sqrt{11}$. Porém não contradiz o item (a) uma vez que a velocidade $c'(0) = (-5,0,-1)$ da andorinha não é unitária.

Questão 4: (2.0 pontos)

Considere a superfície $S : x^2 + y^2 + 4z^2 - 6axyz = 37$. Determine o valor de a para que o plano tangente a S no ponto $(0, -1, 3)$ contenha o ponto $(1, -2, 1)$.

Solução:

Defina $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 6axyz - 37$ e denotemos por π o plano tangente a S : $F(x, y, z) = 0$ no ponto $(0, -1, 3)$. Sabemos que a equação de π é

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,-1,3)}(x-0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,-1,3)}(y+1) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,-1,3)}(z-3) = 0.$$

Calculamos então as derivadas parciais de F no ponto $(0, -1, 3)$:

- $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,-1,3)} = 2x - 6ayz|_{(0,-1,3)} = 18a.$
- $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,-1,3)} = 2y - 6axz|_{(0,-1,3)} = -2.$
- $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,-1,3)} = 8z - 6axz|_{(0,-1,3)} = 24.$

Assim, a equação de π é

$$18ax - 2(y+1) + 24(z-3) = 0.$$

Como queremos que o ponto $(1, -2, 1)$ esteja no plano π, ele deve satisfazer a equação do plano. Avaliando, temos

$$\begin{aligned} 18a(1) - 2((-2)+1) + 24((1)-3) &= 0 \\ 18a &= 46 \\ a &= \frac{23}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de a deve ser 23/9. ■

Questão 5: (1.5 ponto)

Identifique os pontos de máximo e mínimo globais da função $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ na região

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| \leq 3 \text{ e } x^2 \leq y \leq 9\right\}.$$

Solução:

A região D é fechada e limitada e a função f é contínua, portanto f tem máximo e mínimo globais em D.

Primeiro procuremos os pontos críticos interiores. Para isso precisamos identificar onde o gradiente de f se anula:

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y); \quad \nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Mas $(0, 0)$ não está no interior de D, está na fronteira, ∂D. Assim, não há ponto crítico interior.

Em seguida procuremos os pontos críticos na fronteira de D,

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, -3 \le x \le 3, y = 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, -3 \le x \le 3, y = x^2\}.$$

No trecho $y = 9$, $|x| \le 3$ temos: $f(x,9) = x^2 + 9x + 81$, logo

$$\frac{d}{dx} f(x,9) = 2x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}.$$

Mas $-9/2 < -3$, logo não há ponto crítico neste pedaço da fronteira a menos dos extremos, $(-3,9)$ e $(3,9)$.

No trecho $y = x^2$, $|x| \le 3$ temos: $f(x,x^2) = x^2 + x^3 + x^4$, donde

$$\frac{d}{dx} f(x,x^2) = 2x + 3x^2 + 4x^3 = x(2 + 3x + 4x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

pois $2 + 3x + 4x^2 = (2x + 3/4)^2 + 23/16 > 0$. Assim, os pontos críticos neste trecho da fronteira são $(0,0)$ e os extremos $(-3,9)$ e $(3,9)$.

Comparemos os valores de f nos três pontos críticos encontrados:

$$f(-3,9) = 63, \quad f(0,0) = 0, \quad f(3,9) = 117.$$

Portanto o ponto de máximo global é $(3,9)$ e o valor máximo global é 117. O ponto de mínimo global é $(0,0)$ e o valor mínimo global é 0.

Questão 6: (2.0 pontos)

Determine os pontos de máximo e de mínimo globais da função $f(x,y) = x + y$ restrita à elipse $x^2/9 + y^2/16 = 25$.

Solução:

O ponto de máximo global é $(9,16)$, com valor $f(9,16) = 25$, e o ponto de mínimo global é $(-9,-16)$, com valor $f(-9,-16) = -25$.

Usando multiplicadores de Lagrange com a restrição $\Phi(x,y) = x^2/9 + y^2/16 - 25 = 0$, temos as equações de Lagrange

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2\lambda x}{9} \\[2ex] 1 = \dfrac{2\lambda x}{16} \\[2ex] \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 25. \end{cases}$$

Substituindo $x = 9/2\lambda$ e $y = 16/2\lambda$ na equação da restrição, obtemos $25/4\lambda^2 = 25$, o que nos dá $\lambda^2 = 1/4$, ou seja, $\lambda = \pm 1/2$.

Com isso, chegamos a $x = 9$ e $y = 16$ se $\lambda = 1/2$ e $x = -9$ e $y = -16$ se $\lambda = -1/2$.

Os pontos críticos são, portanto, $\pm(9,16)$.

Calculando os valores da função nesses pontos, obtemos que $(9, 16)$ é o ponto de máximo e $(-9, -16)$ é o ponto de mínimo.

Justifique suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.