Questão 1: (1.5 ponto)
Sabendo que $x_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$ é solução geral de uma equação homogênea da forma $x'' + bx' + cx = 0$, com b, c constantes, determine b e c e encontre a solução geral da equação não-homogênea $x'' + bx' + cx = 8e^{3t}$.

Solução:
As constantes são $b = -4$ e $c = 3$ e a solução geral da equação não-homogênea é

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + 4te^{3t}.$$

De fato, para que $x_h = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ seja solução da equação homogênea, o seu polinômio característico deve ter raízes 1 e 3. Como o coeficiente do termo de segunda ordem x'' é 1, isso significa que o polinômio característico deve ser $p(r) = (r-1)(r-3) = r^2 - 4r + 3$. Logo, a equação é $x'' - 4x' + 3x$, de forma que $b = -4$ e $c = 3$.

Agora, como e^{3t} já é solução da equação homogênea, devemos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma $x_p(t) = Ate^{3t}$. Derivando, temos

$$x_p' = (A + 3At)e^{3t},$$

$$x_p'' = (6A + 9At)e^{3t}.$$

Assim,

$$x_p'' - 4x_p' + 3x_p = (6A - 4A + 9At - 12At + 3At)e^{3t} = 2Ae^{3t}.$$

Para que x_p seja solução particular, devemos ter $2A = 8$, ou seja, $A = 4$. Portanto, $x_p(t) = 4e^{3t}$ é a solução particular e

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + 4te^{3t}$$

é a solução geral da equação não-homogênea.

Questão 2: (1.5 ponto)
Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), & 0 < x < \pi, \\ y(\pi/2) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sabendo que $\mu(x) = \operatorname{sen} x$ é um fator integrante desta equação diferencial e que a solução do problema (1) é $y = y(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{1}{2 \operatorname{sen} x}$, ache $a(x)$ e $b(x)$.

Solução:
Como μ é fator integrante desta equação temos $\mu' = \mu a$. Logo $\cos(x) = \operatorname{sen}(x)a(x)$. Portanto

$$a(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Usando novamente que μ é fator integrante desta equação obtemos

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)b(x),$$

isto é,

$$\Big(\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} - \frac{1}{2}\Big)' = \operatorname{sen}(x)\, b(x).$$

Logo

$$\operatorname{sen}(x)\, \cos(x) = \operatorname{sen}(x)\, b(x).$$

Como $x > 0$ deduzimos que $b(x) = \cos(x)$.

Questão 3: (2.0 pontos)

Seja Ω a interseção das regiões $\mathcal{A} = \{(x, y, z); x^2+y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{B} = \{(x, y, z); z \geq 0\}$ e $\mathcal{C} = \{(x, y, z); z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. (a) As fronteiras de $\mathcal{A}$, de $\mathcal{B}$ e de $\mathcal{C}$, respectivamente, são superfícies quádricas; identifique cada uma delas. (b) Faça um esboço da região Ω.

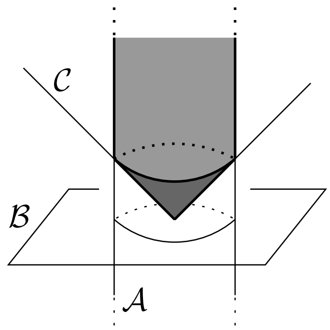
Solução:

(a.) A fronteira de $\mathcal{A}$ é o cilindro circular reto $\{x^2 + y^2 = 1\}$ paralelo ao eixo z.

A fronteira de $\mathcal{B}$ é o plano horizontal $\{z = 0\}$.

A fronteira de $\mathcal{C}$ é a porção do cone circular reto $\{x^2 + y^2 = z^2\}$ que se encontra no semi-espaço $\{z \geq 0\}$.

(b.) Esboço:



Questão 4: (1.5 ponto)

Uma partícula se desloca ao longo de uma curva descrita por

$$\mathbf{r}(t) = \Big(t\cos(t), t\operatorname{sen}(t), t^2\Big), \quad t \geq 0.$$

Encontre a equação para uma superfície quádrica S que contenha a curva. Identifique a quádrica.

Solução:

Observamos que, se $(x(t), y(t), z(t)) = \Big(t\cos(t), t\operatorname{sen}(t), t^2\Big)$, então

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = t^2 = z(t).$$

Logo a curva está contida na superfície descrita pelas equações

$$z = x^2 + y^2.$$

Esta superfície é um parabolóide circular. Notamos que este parabolóide está no semi-espaço $z \geq 0$.

Questão 5: (2.0 pontos)

Seja $\mathcal{C}$ uma curva com parametrização $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, e suponha que as coordenadas satisfaçam as equações:

$$\begin{cases} x'' + x = 0, \\ y = -x', \\ z' = 4, \\ x(0) = 0, \ y(0) = -2, \ z(0) = 2. \end{cases}$$

(a) Encontre fórmulas explícitas para $(x(t), y(t), z(t))$.

(b) Encontre uma parametrização para a reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $P_0 = (2, 0, 2\pi + 2)$.

(c.) Calcule o comprimento do trecho da curva $\mathcal{C}$ obtido restringindo-se o parâmetro ao intervalo $t \in [-\pi, 5\pi]$

Solução:

(a) Temos que

$$x'' + x = 0,$$

com equação característica:

$$r^2 + 1 = 0,$$

portanto $r = \pm i$ e a sulução geral para $x(t)$ tem a forma:

$$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t).$$

Como $x(0) = C_1 = 0$, temos:

$$x'(t) = C_2 \cos(t)$$

de $x'(0) = -y(0) = 2$ obtemos que $x'(0) = C_2 = 2$.

Portanto, $x(t) = 2 \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = -x'(t) = -2\cos(t)$.
De $z' = 4$, temos que $z(t) = 4t + D$, onde $D = z(0) = 2$.

Daí,

$$c(t) = (2 \operatorname{sen}(t), -2\cos(t), 4t + 2).$$

(b) Primeiramente indentificamos P_0 como $c(t_0)$:

$$P_0 = (2, 0, 2\pi + 2) = c(t_0) = (2\,\mathrm{sen}(t_0), -2\cos(t_0), 4t_0 + 2) \iff t_0 = \pi/2.$$

Portanto uma parametrização da reta tangente pode ser dada por:

$$r(s) = c(\pi/2) + sc'(\pi/2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Calculando,

$$c'(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4)$$

$$c'(\pi/2) = (0, 2, 4)$$

Daí,

$$r(s) = (2, 0, 2\pi + 2) + s(0, 2, 4) = (2, 2s, 2\pi + 2 + 4s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(c) O comprimento é:

$$L = \int_{-\pi}^{5\pi} ||c'(t)||dt = \int_{-\pi}^{5\pi} \sqrt{(2\cos(t))^2 + (2\,\mathrm{sen}(t))^2 + 4^2}dt$$

$$= \int_{-\pi}^{5\pi} \sqrt{20}dt = \sqrt{20}t|_{-\pi}^{5\pi} = 6\pi\sqrt{20}.$$

Questão 6: (1.5 ponto)

Considere uma curva $\mathcal{C}$ e um ponto P_0 sobre a curva. O ângulo θ_0 que a curva $\mathcal{C}$ faz com o eixo x em P_0 é definido pelas condições

$$\cos(\theta_0) = \frac{\vec{e_1} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi,$$

onde $\vec{e_1} = (1, 0)$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ é um vetor tangente a $\mathcal{C}$ em P_0.

Seja $\mathcal{C}$ definida pelas equações paramétricas $(x(t), y(t)) = (t\,\mathrm{sen}(t), t\cos(t)), \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Qual é o ângulo que esta curva faz com o eixo x em $P_0 = (0, 0)$?

Solução:

Chamemos de θ_0 este ângulo. Para calcular θ_0 precisaremos de um vetor tangente a $\mathcal{C}$ em $(0,0)$, $\vec{v}$. Podemos usar $\vec{v} = (x'(0), y'(0)) = (0,1)$ e notemos que $\|\vec{v}\| = 1$. Assim,

$$\cos(\theta_0) = \frac{\vec{e_1} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (1,0) \cdot (0,1) = 0.$$

Sabendo que $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ vem necessariamente

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$