Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 29 de novembro de 2018

Prova Final

1. Seja $z = z(x)$ uma função diferenciável tal que
$$z' - \frac{z}{x} = x \ln x.$$
Então $\left(\frac{z}{x}\right)' =$
   (a) $\ln x$
   (b) $-\ln x$
   (c) $-\frac{\ln x}{x}$
   (d) $-x^2 \ln x$
   (e) $x^2 \ln x$

2. Sabendo que $y = y(x)$ é uma função diferenciável que satisfaz a identidade
$$\int_C^{y(x)} e^{-r}\, dr = \int_1^x s e^s\, ds$$
para todo $x \geq 1$, podemos concluir que
   (a) $y' = xe^{x+y}$ e $y(1) = C$.
   (b) $y' = -xe^{x+y}$ e $y(1) = C$.
   (c) $y' = xe^{x-y}$ e $y(1) = 0$.
   (d) $y' = -xe^{x-y}$ e $y(1) = 0$.
   (e) $y' = -xe^{x+y}$ e não há informação suficiente para concluir quanto vale $y(1)$.

3. Sejam $Y_1 = Y_1(t)$ e $Y_2 = Y_2(t)$ duas soluções da equação diferencial
$$y'' + 2y' - 3y = 5e^t.$$
Suponha que $Y_1'(0) = Y_2'(0)$. Então podemos afirmar que, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos:
   (a) $Y_1 - Y_2 = C(3e^t + e^{-3t})$, para algum $C \in \mathbb{R}$.
   (b) $Y_1 - Y_2 = C(e^t + 3e^{-3t})$, para algum $C \in \mathbb{R}$.
   (c) $Y_1 - Y_2 = C(3e^t - e^{-3t})$, para algum $C \in \mathbb{R}$.
   (d) $Y_1 - Y_2 = C(2e^t - 3e^{-3t})$, para algum $C \in \mathbb{R}$.
   (e) $Y_1 - Y_2 = C\left(2e^t - \frac{e^{-3t}}{3}\right)$, para algum $C \in \mathbb{R}$.

4. Uma parametrização da reta tangente à curva espacial definida por
$$\gamma(t) = \left(\operatorname{sen} t, t^2 e^{-t}, 4\sqrt{3 + e^t}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$
no ponto $P = (0, 0, 8)$ é:
   (a) $\sigma(t) = (t, 0, 8 + t),\ t \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sigma(t) = (t, 0, t),\ t \in \mathbb{R}$.
   (c) $\sigma(t) = (0, 0, 8 + t),\ t \in \mathbb{R}$.
   (d) $\sigma(t) = (1, 0, 1 + 8t),\ t \in \mathbb{R}$.
   (e) Não existe reta tangente passando por P.

5. Considere a curva $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{4\sqrt{t^3}}{3}, 2t\right), t > 0$. Andando sobre a curva a partir do ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 2\right)$ ao longo de um arco de comprimento igual a 8, chegaremos ao ponto:
   (a) $\left(\frac{9}{2}, 4\sqrt{3}, 6\right)$.
   (b) $\left(2, \frac{8\sqrt{2}}{3}, 4\right)$.
   (c) $\left(\frac{49}{2}, \frac{28\sqrt{7}}{3}, 14\right)$.
   (d) $\left(3, 2\sqrt{3}, 2\right)$.
   (e) Nenhuma das demais alternativas.

6. Considere a quádrica de equação $x^2 - 2x - y^2 - z^2 = 3$.

   I. Essa quádrica é um hiperbolóide que corta o plano yz.
   II. Uma parametrização da interseção da quádrica com o plano $x = 5$ é $\alpha(t) = (5, 2\sqrt{3}\cos t, 2\sqrt{3}\operatorname{sen} t)$, $0 \leq t < 2\pi$.
   III. Uma parametrização da interseção do plano $z = 1$ com a porção da quádrica no semi-espaço $x \geq 1$ é $\alpha(t) = (1 + \sqrt{5}\sec t, \sqrt{5}\operatorname{tg} t, 1)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

   (a) As afirmações II. e III. são verdadeiras.
   (b) Todas as afirmações são verdadeiras.
   (c) A afirmação I. e III. são falsas.
   (d) As afirmações II. e III. são falsas.
   (e) As afirmações I. e III. são verdadeiras.

7. A curva C parametrizada por
$$\mathbf{r(t)} = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t), \quad t \in \mathbb{R},$$
está contida em:
   (a) um cone com vértice no ponto $(0, 0, 0)$.
   (b) um plano.
   (c) uma esfera com centro no ponto $(0, 0, 0)$.
   (d) um parabolóide.
   (e) um cilindro.

8. Se $f(x, y) = \frac{x^4(\cos y)^2}{x^2 + y^2}$, então:
   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não pode ser calculado pois $f(x, y)$ não está definida em $(0, 0)$.
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.
   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 2$.

9. Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável em $P = (2, 3)$. Considere a função $g = g(t) = f(2 - 5t, 3)$, $t \in \mathbb{R}$. Então é correto afirmar que:

(a) Se $f_x(2, 3) = 0$ e $f_{xx}(2, 3) > 0$ então g tem ponto de mínimo em $t = 0$.

(b) Se $f_y(2, 3) = 0$ e $f_{yy}(2, 3) > 0$ então g tem ponto de mínimo em $t = 0$.

(c) Se $f_x(2, 3) = 0$ e $f_{xx}(2, 3) > 0$ então g tem ponto de máximo em $t = 0$.

(d) Se $f_y(2, 3) = 0$ e $f_{yy}(2, 3) > 0$ então g tem ponto de máximo em $t = 0$.

(e) Se $f_x(2, 3) = 0$ e $f_{xx}(2, 3) > 0$ então não é possível concluir se g possui valor extremo local em $t = 0$.

10. Considere as afirmações sobre a função $z = f(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$:

I. f possui três pontos críticos distintos.
II. f possui exatamente um ponto crítico e este é ponto de mínimo local.
III. Há ao menos um ponto crítico f que é ponto de sela.

(a) As afirmações I. e II. são falsas e a afirmação III. é verdadeira.

(b) Todas as afirmações são verdadeiras.

(c) A afirmação I. e III. são falsas e a afirmação II. é verdadeira.

(d) As afirmações II. e III. são falsas e a afirmação I. é verdadeira.

(e) As afirmações I. e III. são verdadeiras e a afirmação II. é falsa.

11. Considere a função $f(x, y) = \ln(1 + x^2 - \sqrt{3}y^2)$ e o vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b)$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Sabendo que a derivada direcional de f no ponto $(1, 1)$ e na direção de $\mathbf{u}$ vale zero, podemos afirmar que:

(a) $a = \sqrt{3}/2$ e $b = 1/2$.

(b) $a = 1/2$ e $b = \sqrt{3}/2$.

(c) $a = \sqrt{2}/2$ e $b = \sqrt{2}/2$.

(d) $a = 1/\sqrt{5}$ e $b = 2/\sqrt{5}$.

(e) $a = 2/3$ e $b = \sqrt{5}/3$.

12. Considere a função $f(x, y) = x^2y^2$ definida na região D dos pontos (x, y) que satisfazem a relação $x^2+y^2 \leq 4$. Então:

(a) O valor mínimo absoluto de f em D é 0 e o valor máximo absoluto de f em D é 4. Há um infinidade de pontos de mínimo e 4 pontos de máximo em D

(b) O valor mínimo absoluto de f em D é 0 e o valor máximo absoluto de f em D é 4. Há um ponto de mínimo e 4 pontos de máximo em D.

(c) O valor mínimo absoluto de f em D é 0 e o valor máximo absoluto de f em D é 2. Há um ponto de mínimo e uma infinidade pontos de máximo D.

(d) O valor mínimo absoluto de f em D é 0 e o valor máximo absoluto de f em D é 4. Há 4 pontos de mínimo e 4 pontos de máximo em D.

(e) nenhuma das demais alternativas.

13. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Considere um ponto $P = (x_0, y_0)$ sobre a curva de nível $\mathcal{C}$ em que $f = 1$. Sabendo que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 1)$ é dado pela equação $3x - 8y + z - 7 = 0$ e que $\mathbf{u} = (a, b)$ é um vetor tangente a $\mathcal{C}$ então é correto afirmar que

(a) $3a - 8b = 0$.

(b) $8a - 3b = 0$.

(c) $3a + b = 8$.

(d) $3a - 8b = 1$.

(e) $8a - 3b = 1$.