Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 10 de dezembro de 2018

Prova de Segunda Chamada

1. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Suponha que $f(3x+1, 3x-1) = 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então podemos afirmar que:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1)$.
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = -3\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1)$.
   (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1) + 9\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = 0$.
   (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1) = 0$.
   (e) $\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = 4\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1)$.

2. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + xy$ e paralelo ao plano $2x + 3y - z = 0$ é:
   (a) $z = 2x + 3y + 3$.
   (b) $z = 2x + 3y - 3$.
   (c) $z = 4x + 6y + 8$.
   (d) $z = -x + 3y + 9$.
   (e) $z = -x - 6y + 10$.

3. Considere a função definida por:
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{7x^2 + 7y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
   É correto afirmar que:
   (a) existe o limite da função f em $(0, 0)$ mas f não é contínua em $(0, 0)$.
   (b) não existe o limite da função f em $(0, 0)$.
   (c) a função f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.
   (d) a função f não é contínua em $(0, 1)$.
   (e) não existe o limite da função f em $(1, 0)$.

4. Uma partícula se move ao longo de uma curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, com vetor velocidade $V(t) = \left(1, \dfrac{-2y(t)}{t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2}\right)$, $t > 0$. A partícula no instante $t = 2$, passa pelo ponto $P_2 = (2, 1)$. Determine a posição da partícula em cada instante.
   (a) $\sigma(t) = \left(t, \dfrac{\cos 2 - \cos t + 4}{t^2}\right), t > 0$.
   (b) $\sigma(t) = \left(t, -2\ln t + \dfrac{\cos t}{t}\right), t > 0$.
   (c) $\sigma(t) = \left(t, \dfrac{-\cos t}{t^2} + \dfrac{8 + \cos 2}{4}\right), t > 0$.
   (d) $\sigma(t) = \left(t, \dfrac{\cos 2 - \cos t + 8}{8}\right), t > 0$.
   (e) Nenhumas das demais alternativas.

5. Seja $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$. É correto afirmar que:
   (a) f possui somente um ponto crítico e este ponto crítico é um ponto de sela.
   (b) f possui somente um ponto crítico e este ponto crítico é um ponto de máximo.
   (c) f possui somente um ponto crítico e este ponto crítico é um ponto de mínimo.
   (d) f possui dois pontos críticos, sendo um de máximo e outro de sela.
   (e) Nenhuma das demais alternativas.

6. Encontre uma equação paramétrica para a reta tangente à curva de interseção das superfícies
$$\mathcal{S}_1 : x^2 + 2y + 2z = 4 \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_2 : y = 1$$
   no ponto $\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$.
   (a) $x = 1 - 2t,\ y = 1,\ z = \dfrac{1}{2} + 2t$.
   (b) $x = 1,\ y = 1,\ z = \dfrac{1}{2} + t$.
   (c) $x = -t,\ y = 0,\ z = t$.
   (d) $x = 1 - t,\ y = 1,\ z = \dfrac{1}{2} - t$.
   (e) $x = 1 + t,\ y = 1,\ z = \dfrac{1}{2} + 2t$.

7. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $\nabla f(1, 2) = (2, -1)$. Seja $\mathbf{u}$ é um vetor unitário tal que $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = 1$. Se $\mathbf{v}$ é um vetor unitário perpendicular a $\mathbf{u}$, quais os possíveis valores de $D_{\mathbf{v}}f(1, 2)$?
   (a) Os valores possíveis são -2 e 2.
   (b) O único valor possível é 2.
   (c) O único valor possível é 0.
   (d) Os valores possíveis são -1 e 1.
   (e) Nenhuma das demais alternativas.

8. Considere uma superfície $\mathcal{S}$ no espaço que é o gráfico de uma função diferenciável. Se $\mathbf{r}_1(t) = (t, 1, t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ e $\mathbf{r}_2(s) = (1, s, s^3)$ $(s \in \mathbb{R})$ são duas curvas em $\mathcal{S}$ que concorrem no ponto $P = (1, 1, 1)$, uma equação do plano tangente a $\mathcal{S}$ em P é:
   (a) $z = 2x + 3y - 4$.
   (b) $z = 2x - 3y + 2$.
   (c) $z = x + y - 1$.
   (d) $z = 1$.
   (e) Não há informação suficiente para resolver a questão.

9. A superfície descrita pela equação

$$4x(x-1) - 4y(y+4) - z^2 - 16 = 0$$

é um:

(a) hiperbolóide de duas folhas.
(b) hiperbolóide de uma folha.
(c) elipsóide.
(d) parabolóide elíptico.
(e) parabolóide hiperbólico.

10. Um objeto desliza sobre uma superfície com velocidade escalar $v = v(t)$ satisfazendo a equação diferencial $v' = -\sqrt{v}$. Se o objeto parte com velocidade inicial $v(0) = v_0 > 0$ e se $T^* > 0$ é o instante em que o objeto para de se mover, então

(a) $T^* = 2\sqrt{v_0}$.
(b) $T^* = \sqrt{v_0}/2$.
(c) $T^* = 4\sqrt{v_0}$.
(d) $T^* = 2v_0$.
(e) $T^* = (v_0)^2$.

11. Uma solução $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, da equação diferencial $y'' + y' - 2y = 4x$ é

(a) $y(x) = e^x - e^{-2x} - 2x - 1$.
(b) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.
(c) $y(x) = 4x$.
(d) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 4x$.
(e) $y(x) = -2x$.

12. Seja $\mathcal{S}$ uma quádrica dada por $x^2 + y^2 - cz^2 - 2x + 2 = 0$, onde $c \in \mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmativas.

I. Para $c > 0$ e $a^2 > 1/c$, as curvas de nível $z = a$ são circunferências.

II. $\mathcal{S}$ é um hiperbolóide de uma folha se, e somente se, $c > 0$.

III. $\mathcal{S}$ tem interseção não vazia com o plano $z = y$ se, e somente se, $c > 1$.

Indique a alternativa correta:

(a) As afirmativas I. e III. são verdadeiras e a II. é falsa.
(b) As afirmativas I. e II. são verdadeiras e a III. é falsa.
(c) Somente a afirmativa III. é verdadeira.
(d) Todas as afirmativas são verdadeiras.
(e) Todas as afirmativas são falsas.

13. Seja $z = f(x,y) = 3x - 8y + 6$, onde $(x,y) \in \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$. Considere as afirmativas:

I. A função f não atinge seus valores máximo e mínimo absolutos em $\mathcal{D}$ pois ∇f não se anula em nenhum ponto de $\mathcal{D}$.

II. A função f atinge seus valores máximo e mínimo absolutos em pontos da fronteira de $\mathcal{D}$.

III. Nenhum dos quatro cantos da fronteira de $\mathcal{D}$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, podem ser pontos de máximo ou mínimo absolutos pois a fronteira não é uma curva diferenciável nestes pontos.

(a) As afirmações I. e III. são falsas e a afirmação II. é verdadeira.
(b) As afirmações II. e III. são falsas e a afirmação I. é verdadeira.
(c) As afirmações I. e II. são falsas e a afirmação III. é verdadeira.
(d) Todas as afirmações são verdadeiras.
(e) Todas as afirmações são falsas.