Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 22 de novembro de 2018

Prova P2

1. Sobre o plano tangente ao gráfico de

$$f(x,y) = (x + \cos y)x^2$$

no ponto $(1, 0, 2)$ é correto afirmar que:

(a) contém o ponto $(1, 3, 2)$.
(b) é perpendicular ao plano xy.
(c) contém a reta $x = 2$ do plano xy.
(d) é perpendicular ao vetor $(5, 0, 1)$.
(e) é perpendicular ao vetor $(12, 0, -2)$

2. Se $P = (a, b, c)$ é um ponto na esfera de raio r, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, que maximiza a função $f(x, y, z) = x + z$, então o valor de $b + ac$ é:

(a) $r^2/2$.
(b) $r/2$.
(c) $\sqrt{r/2}$.
(d) $\sqrt{r^2/2}$.
(e) Não existe nenhum ponto P nas condições descritas acima.

3. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b) = 5$, $f_x(a, b) \neq 0$ e $f_y(a, b) \neq 0$. Seja $\mathcal{C}$ a curva de equação $f(x, y) = 5$ e $\mathbf{u}$ um vetor não-nulo, tangente a $\mathcal{C}$ em (a, b). Considere as afirmativas:

I. A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(a, b) = 0$;

II. $\nabla f(a, b) \bullet \mathbf{u} = 0$;

III. Se $\mathbf{v}$ é um vetor qualquer e $\mathbf{w} = \nabla f(a, b)$, então $D_{\mathbf{w}} f(a, b) \geq D_{\mathbf{v}} f(a, b)$;

IV. $\mathbf{r}(t) = (a + f_x(a, b)t, b - f_y(a, b)t)$, $t \in \mathbb{R}$, é a equação da reta normal a $\mathcal{C}$ em (a, b);

V. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, é uma parametrização de $\mathcal{C}$ e $h(t) = f(\gamma(t))$, então $h'(\alpha) = 0$, onde $\gamma(\alpha) = (a, b)$.

Assinale a resposta correta:

(a) Apenas a afirmativa IV é falsa.
(b) Todas são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmativas IV e V são falsas.
(d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(e) Nenhuma das demais alternativas.

4. Três números positivos x, y, z satisfazem a relação $x + 2y + z = 60$. O maior valor possível para o produto xyz é:

(a) 4000.
(b) 5000.
(c) 2000.
(d) 1000.
(e) 1024.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0, 0) = 1$ e $g(x, y) = f\big(f(x, y), y\big)$. Sabendo que

$$\nabla f(0, 0) = (2, 3) \quad \text{e} \quad \nabla f(1, 0) = (3, 2),$$

podemos afirmar que:

(a) $\nabla g(0, 0) = (6, 11)$.
(b) $\nabla g(0, 0) = (6, 6)$.
(c) $\nabla g(0, 0) = (9, 8)$.
(d) $\nabla g(0, 0) = (11, 6)$.
(e) $\nabla g(0, 0) = (9, 6)$.

6. Sobre o limite L da função

$$f(x, y) = \frac{3x + y^3}{\cos(2\pi x) - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

quando (x, y) converge para $(1, 0)$, podemos afirmar que

(a) $L = 3$.
(b) $L = -3$.
(c) $L = 1/\pi$.
(d) $L = 3/\pi$.
(e) L não existe.

7. Sejam g e h duas funções continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e seja f a função definida por

$$f(x, y) = e^{xy} + g(x)h(y) + g(x) + h(y).$$

Então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é igual a

(a) $(1 + xy)e^{xy} + g'(x)h'(y)$.
(b) $(1 + xy)e^{xy} + g''(x)h(y) + g(x)h''(y)$.
(c) $xye^{xy} + g'(x)h'(y)$.
(d) $xye^{xy} + g'(x)h'(y) + g''(x) + h''(y)$.
(e) $(1+x+y)e^{xy}+g''(x)h(y)+g'(x)h'(y)+g(x)h''(y)$.

8. Considere uma função continuamente diferenciável $z = f(x, y)$. Sabendo que $f(1, 1) = 2$, $f_x(1, 1) > 0$ e $\mathbf{u} = (1, -1)$ é um vetor tangente à curva de nível $f(x, y) = 2$ no ponto $(1, 1)$, qual das equações abaixo poderia representar a equação de um plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 2)$?

(a) $x + y - 3z + 4 = 0$.
(b) $x + y + 3z + 4 = 0$.
(c) $(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 2) = 0$.
(d) $(x - 1) - (y - 1) + 3(z - 2) = 6$.
(e) $x - y + 2z + 6 = 0$.

9. Seja $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ e considere as seguintes afirmativas:

   I. f possui exatamente três pontos críticos.

   II. Apenas um ponto crítico de f é ponto de mínimo local.

   III. Apenas um ponto crítico de f é ponto de sela.

   Indique a alternativa correta:

   (a) As afirmativas I e III são verdadeiras e a II é falsa.
   (b) As afirmativas I e II são verdadeiras e a III é falsa.
   (c) Somente a afirmativa I é verdadeira.
   (d) Todas as afirmativas são verdadeiras.
   (e) Todas as afirmativas são falsas.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de segunda ordem contínuas tal que $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 0$. Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto de sela de f, que $f_{xx}(1, 1) = 2$ e $f_{yy}(1, 1) = 4$, e que $f_{xy}(1, 1) > 0$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

    (a) $f_{xy}(1, 1) > \sqrt{8}$.
    (b) $f_{xy}(1, 1) < \sqrt{8}$.
    (c) $f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = \sqrt{8}$.
    (d) $f_{xy}(1, 1) = f_{yx}(1, 1) = 2$.
    (e) Nenhuma das demais alternativas.

11. Seja $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$ e considere $\mathcal{D}$ a região triangular, fechada, de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

    (a) Nenhuma das demais alternativas.
    (b) O maior valor de f em $\mathcal{D}$ é 1 e o menor valor de f em $\mathcal{D}$ é -14.
    (c) O maior valor de f em $\mathcal{D}$ é 2 e o menor valor de f em $\mathcal{D}$ é -17.
    (d) O maior valor de f em $\mathcal{D}$ é 9 e o menor valor de f em $\mathcal{D}$ é -17.
    (e) f não assume um valor máximo em $\mathcal{D}$.

12. Seja $z = f(x, y) = x\sqrt{2x + 4y}$. Então a derivada direcional máxima de f no ponto $(2, -3/4)$ ocorre na direção do vetor

    (a) $\mathbf{u} = (3, 4)$.
    (b) $\mathbf{u} = (-3, 4)$.
    (c) $\mathbf{u} = (4, -3)$.
    (d) $\mathbf{u} = (4, 3)$.
    (e) $\mathbf{u} = (2, 3)$.

13. Seja $f(x, y) = x^3y - xy^2 + cx^2$ onde c é uma constante. Se f cresce mais rapidamente no ponto $(3, 2)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = (2, 5)$, então c vale:

    (a) $-22/3$.
    (b) $44/5$.
    (c) $3/2$.
    (d) 0.
    (e) $-15/2$.