**Universidade Federal do Rio de Janeiro**
**Instituto de Matemática**
**Disciplina: Cálculo II**
**Data: 24 de setembro de 2018**

**P1**

1. Lembre que $cos^2\theta = (1+\cos(2\theta))/2$. A equação $y''-2y'+y=\cos^4 x$ tem uma solução particular da forma (onde as letras maiúsculas representam constantes arbitrárias):
   (a) $y_p(x) = A + B\,\mathrm{sen}(2x) + C\cos(2x) + D\,\mathrm{sen}(4x) + E\cos(4x)$
   (b) $y_p(x) = A\cos(2x) + B\cos(4x)$
   (c) $y_p(x) = A\,\mathrm{sen}^4(x) + B\cos^4(x)$
   (d) $y_p(x) = A + B\,\mathrm{sen}(4x) + C\cos(4x)$
   (e) Nenhuma das demais alternativas

2. Sobre as soluções lineares, isto é, da forma $y = Ax+B$, da equação $y''+x(y')^2 = 4x$ podemos afirmar que:
   (a) Há infinitas soluções lineares
   (b) Não há soluções lineares
   (c) Há uma única solução linear
   (d) Há um par de soluções lineares
   (e) Nenhuma das demais alternativas

3. A função $y(x) = e^x\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, é solução de qual das equações abaixo?
   (a) $y''-2y'+2y=0.$
   (b) $y''+y=0.$
   (c) $y''+y=e^x\cos x.$
   (d) $y''-2y'+2y=x.$
   (e) $y''-y=e^x.$

4. Qual é a solução da equação diferencial $y'-3y=e^{2x}$ satisfazendo a condição inicial $y(0)=3$?
   (a) $y(x) = 4e^{3x} - e^{2x}.$
   (b) $y(x) = 4e^{3x} - e^{4x}.$
   (c) $y(x) = 5e^{4x} - 2e^{2x}.$
   (d) $y(x) = 2e^{3x} + e^{2x}.$
   (e) Nenhuma das demais alternativas.

5. Considere a curva parametrizada por
$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2t), \quad t\in[0,\pi].$$
   Em qual ponto da curva o vetor tangente faz um ângulo $\frac{\pi}{3}$ com o vetor $(0,1,0)$?
   (a) $(\sqrt{2},\sqrt{2},\pi/2)$
   (b) $(\sqrt{3},\sqrt{3},\frac{\pi^2}{16})$
   (c) $(\sqrt{3},1,\frac{\pi^2}{36})$
   (d) $\mathbf{r}(\pi/6)$
   (e) $(0,2,\frac{\pi^2}{4})$

6. Dois objetos se deslocam segundo os seguintes vetores posição:
   $\mathbf{r_1}(t) = (\sqrt{t}, t),\ \ t\geq 0$ e $\mathbf{r_2}(t) = (t, 1-t^2),\ \ t\geq 0.$
   Lembre que a velocidade escalar de um objeto com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ é $|\mathbf{r}'(t)|$.
   Considere as alternativas:
   I. Os objetos se chocam em um ponto
   II. As trajetórias dos objetos se cruzam em dois pontos
   III. No ponto $(\sqrt{2}/2, 1/2)$ o ângulo $\theta$ entre entre as trajetórias é tal que $\cos\theta = -1/3$
   IV. O segundo objeto cruza o eixo $x$ no instante $t=1$ com velocidade escalar igual a 2
   V. Quando $t\to\infty$, a velocidade escalar do primeiro objeto tende a 1

   (a) Apenas as alternativas III e V são verdadeiras
   (b) Apenas as alternativas I e II são falsas
   (c) Apenas a alternativa I é falsa
   (d) Apenas as alternativas I e III são falsas
   (e) Todas as alternativas são falsas

7. Uma partícula se desloca no plano $xy$ em movimento circular de raio $r=1$ tal que sua velocidade angular satisfaz a seguinte condição:
$$\frac{d\theta}{dt} = \theta, \quad \theta(0) = 1.$$
   Se o vetor posição desse objeto é $\mathbf{r}(t)$ então sua velocidade escalar $v = |\mathbf{r}'(t)|$ no instante $t=2\pi$ é:
   (a) $v = e^{2\pi}$
   (b) $v = e^{-2\pi}$
   (c) $v = e^{\pi}$
   (d) $v = e^{-\pi}$
   (e) $v = 1$

8. Seja $\mathcal{C}$ a curva no plano $xy$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t^2-1, t^3-t)$, $t\in\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmativas:
   I. $\mathcal{C}$ cruza o eixo $y$ em um único ponto do plano.
   II. $\mathcal{C}$ é tangente à reta $x=-1$ em um único ponto do plano.
   III. $\mathcal{C}$ está contida no gráfico da função $y=f(x)=x\sqrt{x+1}$.

   Indique a alternativa correta:
   (a) As afirmativas I e II são verdadeiras e a III é falsa.
   (b) As afirmativas I e III são verdadeiras e a II é falsa.
   (c) As afirmativas II e III são verdadeiras e a I é falsa.
   (d) Todas as afirmativas são verdadeiras.
   (e) Todas as afirmativas são falsas.

9. Considere a superfície quádrica dada por $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + z + 2 = 0$, no espaço $xyz$. Assinale a alternativa correta.

   (a) A interseção da quádrica com o plano $y = 2$ é uma parábola.
   (b) A quádrica é um elipsóide.
   (c) A quádrica é um hiperbolóide de duas folhas.
   (d) A interseção da quádrica com o plano $z = 2$ é uma elipse.
   (e) A quádrica é um cone.

10. Considere a superfície $\mathcal{S}$ dada pela equação $z - x^2 + Ay^2 + 2y = 4$. Para qual valor de $A$ abaixo a superfície $\mathcal{S}$ é um parabolóide elíptico?

   (a) $A = -1/4$.
   (b) $A = 1/4$.
   (c) $A = 0$.
   (d) $A = 2$.
   (e) Nenhuma das demais alternativas.

11. A curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t, t^2), \quad t \geq 0$$

   está contida em

   (a) Um cone
   (b) Um plano
   (c) Um parabolóide
   (d) Um hiperbolóide
   (e) Um elipsóide

12. Uma parametrização da curva $\mathcal{C}$ obtida como interseção do plano $2y + z = 0$ com a superfície definida por $z = x^2 + y^2 - 3$ é:

   (a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t - 1, 2 - 4\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (b) $\mathbf{r}(t) = (2\,\mathrm{sen}\, t - 1, -2\cos t, 2 - 4\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (c) $\mathbf{r}(t) = (3\,\mathrm{sen}\, t - 1, 3\cos t, 2 + 4\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (d) $\mathbf{r}(t) = (-2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t + 1, 2 + 5\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
   (e) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t + 1, 2 + 4\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

13. Seja $\mathbf{r} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma curva no espaço, $\mathcal{C}$, definida no intervalo $[0, T]$, com $T > 0$. Suponha que $\mathbf{r}$ seja continuamente diferenciável, com derivada denotada por $\mathbf{r}'$. Assinale a alternativa **incorreta**:

   (a) Se o comprimento de arco da curva é igual a $T$, então $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, para todo $t \in [0, T]$.
   (b) Se $|\mathbf{r}'(t)| = k$ para todo $t \in [0, T]$, onde $k > 0$ é uma constante, então o comprimento de arco da curva é $kT$.
   (c) Se $|\mathbf{r}(t)| = k$ para todo $t \in [0, T]$, onde $k > 0$ é uma constante, então a curva $\mathcal{C}$ está contida em uma esfera centrada na origem.
   (d) Se a curva está contida em uma esfera centrada na origem, então $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$.
   (e) Se $\mathbf{r}'(t) = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [0, T]$, onde $a$, $b$ e $c$ são constantes, então a curva é uma reta.