**Universidade Federal do Rio de Janeiro**
**Instituto de Matemática**
**Disciplina: Cálculo II**
**Data: 26 de junho de 2018**

## Prova Final

1. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável. Sejam

$$x(r, \theta) = r\cos\theta, \quad y(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e}$$

$$z(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Suponha que $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ no ponto $(r_0, \theta_0) = (\sqrt{2}, \pi/4)$. Então $3\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) =$

(a) 5.
(b) $\sqrt{10}$.
(c) 2.
(d) $\dfrac{1}{5}$.
(e) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2. Considere a função $f(x, y) = xy$ definida no conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. Assinale a afirmativa **correta**:

(a) $f$ tem dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo absolutos em D. O valor máximo e o valor mínimo de $f$ em D são 1 e -1, respectivamente.
(b) $f$ tem dois pontos de máximo e um ponto de mínimo absoluto em D. O valor máximo e o valor mínimo de $f$ em D são 1 e 0, respectivamente.
(c) $f$ tem dois pontos de máximo e nenhum mínimo absoluto em D. O valor máximo de $f$ em D é 1.
(d) $f$ não tem pontos de máximo e mínimo absoluto em D.
(e) Todas as demais alternativas são falsas.

3. Duas superfícies que passem por um mesmo ponto $P$ são ditas *tangentes* neste ponto se elas tiverem um plano tangente comum em $P$. Se as superfícies de equações $x^2 + y^2 - z = 0$ e $ax^3 + bxy + cz^2 = 35$ são tangentes no ponto $P = (1, 2, 5)$, então o valor de $a + b + c$ é:

(a) 19.
(b) $-21$.
(c) 31.
(d) 13.
(e) $-12$.

4. Considere a função $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$. Se $\mathbf{i} = (1, 0)$ é o vetor unitário na direção $x$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$ é o vetor unitário na direção $y$, então:

(a) No ponto $P = (4, 6)$, a máxima taxa de variação de $f$ é 10 e a direção em que $f$ varia mais rapidamente é $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
(b) No ponto $P = (4, 6)$, a máxima taxa de variação de $f$ é $f(4, 6) = 48$ e a direção em que $f$ varia mais rapidamente é $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
(c) No ponto $P = (4, 6)$, a máxima taxa de variação de $f$ é 20 e a direção em que $f$ varia mais rapidamente é $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
(d) No ponto $P = (4, 6)$, a máxima taxa de variação de $f$ é 10 e a direção em que $f$ varia mais rapidamente é $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
(e) No ponto $P = (4, 6)$, a máxima taxa de variação de $f$ é 24 e a direção em que $f$ varia mais rapidamente é $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por: $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \dfrac{5x^2y}{x^4 + 2y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$. Indique a afirmativa **falsa**:

(a) $f(x, y)$ é constante ao longo da reta $y = x$.
(b) $f(x, y)$ é constante igual a zero ao longo das retas $y = 0$ e $x = 0$.
(c) $f(x, y)$ é constante ao longo da parábola $y = x^2$.
(d) $f(x, y)$ é descontínua na origem.
(e) As derivadas parciais $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem e são iguais a zero.

6. A equação da reta tangente à curva de interseção das superfícies $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ e $xyz = 1$, no ponto $P = (1, 1, 1)$ comum a ambas as superfícies, é:

(a) $\mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) + t(1, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
(b) $\mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) + t(-2, 4, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.
(c) $\mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) + t(-1, 2, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.
(d) $\mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
(e) $\mathbf{r}(t) = (1, 1, 1) + t(2, 4, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos $P$ em $\mathbb{R}^3$ tal que a distância de $P$ ao ponto $(1, 1, 1)$ é a mesma que a distância e $P$ ao plano $z = 3$. Então $\mathcal{S}$ é:

(a) o parabolóide $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 4z = 8$.
(b) o cone $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (z - 3)^2$.
(c) o hiperbolóide $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - (z - 3)^2 = 8$.
(d) a esfera $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$.
(e) não existe superfície $\mathcal{S}$.

8. Considere a equação diferencial $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1$, $x \in (0, \pi)$. Se $Y(x)$ é uma solução desta equação diferencial para a qual existe $\lim_{x\to 0} Y(x)$ então:

   (a) $\lim_{x\to 0} Y(x) = 1$.
   (b) $\lim_{x\to 0} Y(x) = 0$.
   (c) $\lim_{x\to 0} Y(x) = 2$.
   (d) $\lim_{x\to 0} Y(x) = \pi$.
   (e) não existe solução $Y(x)$ para a qual existe $\lim_{x\to 0} Y(x)$.

9. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 - z^2$. Seja $S_1$ a superfície de nível de $f$ passando pelo ponto $P = (1, 2, 1)$ e seja $S_2$ a superfície dada pela equação $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = x + 2y + 4z$. Dentre as superfícies temos:

   (a) Dois planos contendo o eixo $y$ e um elipsóide centrado no ponto $(1/2, 1/2, 1/2)$.
   (b) Um cone com vértice no ponto $(0, -1, 1)$.
   (c) Um parabolóide hiperbólico.
   (d) Um cilindro e uma esfera centrada no ponto $(1/2, 1/2, 1/2)$.
   (e) Um hiperbolóide de duas folhas.

10. A função $y(x) = 2e^{3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, só **não é solução** de qual das equações abaixo?

   (a) $y'' - 2y' - 8y = 0$.
   (b) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
   (c) $y'' + y' - 12y = 0$.
   (d) $y'' - y = 16e^{3x}$.
   (e) $y'' - 6y' + 12y = 6e^{3x}$.

11. Se $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$ satisfazendo a condição de contorno $y(0) = k_1 > 0$ e $y(\frac{\pi}{2}) = k_2$, então $k_2/k_1$ vale

   (a) $-e^{\frac{\pi}{2}}$.
   (b) $e^{\frac{\pi}{2}}$.
   (c) $-e^{\pi}$.
   (d) $e^{\pi}$.
   (e) $e^{-\pi}$.

12. Considere um trecho de um rio contendo 10 mil metros cúbicos de água limpa e com um fluxo normal de 18 metros cúbicos de água por segundo. Suponha que, em determinado momento, ocorra um vazamento em uma barreira próxima ao leito e sejam despejados, no início desse trecho, 2 metros cúbicos por segundo de água poluída, com uma concentração de 40 quilogramas de poluente por metro cúbico de água poluída. A partir desse momento, o trecho do rio continua a receber 18 metros cúbicos por segundo de água limpa da parte superior do rio, além dos 2 metros cúbicos por segundo de água poluída, ao mesmo tempo em que deixa fluir 20 metros cúbicos de água contendo o poluente recebido. Assumindo uma situação idealizada em que o poluente mistura-se imediatamente e de forma homogênea em todo o trecho de água do rio, determine qual dos valores abaixo está mais próximo da concentração de poluente nesse trecho do rio após uma hora (em quilogramas por metro cúbico, unidade denotada por $\mathtt{kg/m}^3$).

   (a) $4\,\mathtt{kg/m}^3$
   (b) $2\,\mathtt{kg/m}^3$
   (c) $5\,\mathtt{kg/m}^3$
   (d) $10\,\mathtt{kg/m}^3$
   (e) $20\,\mathtt{kg/m}^3$

13. Duas partículas $A$ e $B$ estão em movimento e suas trajetórias respectivas são descritas por: $\boldsymbol{\sigma}_A(t) = (2\sec t, 2\operatorname{tg} t)$, e $\boldsymbol{\sigma}_B(t) = (5\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, $0 \le t < \pi/2$, onde $t$ representa um instante de tempo. Então:

   (a) A trajetória da partícula $A$ está contida numa hipérbole que intersecta o eixo $x$, enquanto a trajetória da partícula $B$ está contida numa elipse.
   (b) A trajetória da partícula $A$ está contida numa hipérbole que intersecta o eixo $y$, enquanto a trajetória da partícula $B$ está contida numa elipse.
   (c) As trajetórias das partículas se intersectam em dois pontos.
   (d) As partículas $A$ e $B$ colidem num instante $0 \le t^* < \pi/2$.
   (e) A partícula $B$ percorre uma elipse completa.