Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 14 de junho de 2018

Prova P2

1. Seja $f(x,y) = e^{\operatorname{sen} x} + x^5 y + \ln(1+y^2)$. Então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é igual a

   (a) $5x^4$.
   (b) $\dfrac{2y}{1+y^2}$.
   (c) $20x^3 y$.
   (d) $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$.
   (e) $e^{\operatorname{sen} x}\cos x + x^5 + \dfrac{2y}{1+y^2}$.

2. Considere a função $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ que mede a temperatura, em ${}^oC$, de um corpo no espaço. Uma partícula percorre a trajetória dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, passando pelo ponto $P = (1,2,2)$ no instante $t = 4$ min, com vetor velocidade $\sigma'(4) = (-1,2,-1)$. A taxa de variação da temperatura da partícula, quando ela se encontra sobre o ponto P, será

   (a) $2^oC/\text{min}$.
   (b) $14^oC/\text{min}$.
   (c) $4^oC/\text{min}$.
   (d) $8^oC/\text{min}$.
   (e) $6^oC/\text{min}$.

3. Seja $f(x,y,z) = x^2+xy^3+ye^z$. Para qual dos vetores abaixo temos a derivada directional $D_{\mathbf{u}}f(1,1,0) = 1$?

   (a) $\mathbf{u} = (0,0,1)$.
   (b) $\mathbf{u} = (1,0,0)$.
   (c) $\mathbf{u} = (0,1,0)$.
   (d) $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.
   (e) $\mathbf{u} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$.

4. Seja $f(x,y) = x^2 - 2bxy + y^2$. Para que f possua um ponto de sela, b deve satisfazer:

   (a) $b^2 > 1$.
   (b) $b > 1$.
   (c) $b \geq 1$.
   (d) $b < -1$.
   (e) Nenhum.

5. Considere duas funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ continuamente diferenciáveis, definidas em todo o plano xy. Sabendo que o plano tangente ao gráfico de f em (x_0,y_0) só intercepta o gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ e que intercepta o gráfico de g em um único ponto, que é mínimo global de g, indique a afirmativa correta:

   (a) (x_0,y_0) é um ponto crítico de f que necessariamente é um ponto de máximo ou de mínimo global.
   (b) (x_0,y_0) é um ponto crítico de f que necessariamente é um ponto de sela.
   (c) (x_0,y_0) é um ponto crítico de f que pode ser de máximo, de mínimo ou de sela.
   (d) (x_0,y_0) não é um ponto crítico de f.
   (e) Não há informação suficiente para deduzirmos se (x_0,y_0) é um ponto crítico de f ou não.

6. Seja $\mathcal{S}$ a superfície de equação $z = f(x,y)$, onde f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Se a reta $\mathbf{r}(t) = (1+t, 2t, 1+4t)$ $(t \in \mathbb{R})$ é normal a $\mathcal{S}$ em $P = (1,0,1)$, então $f_x(1,0) + f_y(1,0)$ vale:

   (a) $-3/4$.
   (b) $3/4$.
   (c) $1/2$.
   (d) $-1/2$.
   (e) Nenhuma das demais respostas.

7. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$. Podemos dizer que

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x, mx^3)$ existe e varia com $m \in \mathbb{R}$.
   (b) $\lim_{x\to 0} f(x, nx^2)$ existe e varia com $n \in \mathbb{R}$.
   (c) $\lim_{x\to 0} f(x, px)$ não existe para $p \neq 0$.
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
   (e) Nenhuma das demais afirmativas está correta.

8. Os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x,y) = y - x^3 + 2$ na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \leq 1, \; y \leq 1 \text{ e } x+y \geq 1\}$ são, respectivamente:

   (a) 3 e 1.
   (b) 2 e 0.
   (c) 2 e 1.
   (d) 1 e $-1/2$.
   (e) 3 e $-1/2$.

9. Seja $\mathcal{C}$ uma curva dada implicitamente por $f(x,y) = 2$, para alguma função f continuamente diferenciável, e seja P um ponto em C. Considere vetores $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$ e $\mathbf{v} = (-4/5, 3/5)$ e suponha que $D_{\mathbf{u}}f(P) = 5$ e que $\mathbf{v}$ seja tangente a $\mathcal{C}$ em P. Neste caso, $f_x(P) + f_y(P)$ vale

   (a) 7.
   (b) 4/5.
   (c) 5.
   (d) -3.
   (e) 4.

10. Será que existe uma função continuamente diferenciável $z = f(x,y)$ cujas derivadas parciais sejam

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + 4y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - y\,?$$

   (a) NÃO, uma vez que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
   (b) NÃO, pois, se $m = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $n = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ então deveria valer $mn = -1$ para todo x_0, y_0, o que é falso.
   (c) NÃO, pois $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1$, o que não ocorre para funções polinomiais.
   (d) SIM, pois uma função $z = f(x,y)$ possui dois graus de liberdade, definidos pelas variáveis x e y. Esses dois graus de liberdade geram dois graus de liberdade para as derivadas parciais.
   (e) SIM, bastando, para isso, ajustar as constantes de integração em $\displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx$ e em $\displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$.

11. O gráfico da função $z = \ln|x - 2y|$ possui um plano tangente em $(3,1,0)$?

   (a) SIM e a equação deste plano é $x - 2y - z = 1$.
   (b) SIM e a equação deste plano é $3x + y = 0$.
   (c) SIM e a equação deste plano é $x - 2y - z = 0$.
   (d) NÃO, uma vez que $z = f(x,y)$ não é uma função contínua.
   (e) NÃO, uma vez que as derivadas parciais de f não são contínuas.

12. Deseja fabricar-se uma caixa de papelão, retangular, sem tampa, com volume de 32000 cm^3. Quais as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de papelão a ser utilizado?

   (a) 40 cm, 40 cm, 20 cm.
   (b) 80 cm, 20 cm, 20 cm.
   (c) 400 cm, 40 cm, 2 cm.
   (d) 800 cm, 20 cm, 2 cm.
   (e) 400 cm, 20 cm, 4 cm.

13. Usando uma aproximação linear temos que o valor estimado de $\ln[(1,01)^2 + (0,1)^4]$ é:

   (a) $0,02$.
   (b) $0,2$.
   (c) $0,19$.
   (d) $0,019$.
   (e) $0,21$.