**Universidade Federal do Rio de Janeiro**
**Instituto de Matemática**
**Disciplina: Cálculo II**
**Data: 03 de maio de 2018**

## Prova P1

1. Sejam $a$, $b$ e $c$ constantes positivas. Se $y = y(x)$ é uma solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ então $\lim_{x\to\infty} y(x)$

   (a) existe e vale 0.
   (b) existe e vale $\pi$.
   (c) existe e vale $e$.
   (d) não existe e tende para $+\infty$.
   (e) não existe e tende para $-\infty$.

2. Sejam $a$, $\omega > 0$. A parametrização $\mathbf{r}(t) = (a\cos(\omega t), a\,\mathrm{sen}(\omega t), b\omega t)$ descreve uma hélice. O ângulo $\theta$ entre qualquer reta tangente à hélice e o eixo $z$ é constante. Qual o valor de $\cos\theta$?

   (a) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
   (b) $\frac{b}{a^2+b^2}$.
   (c) $\frac{a\omega}{a^2+b^2}$.
   (d) $\frac{a^2+b^2}{\omega}$
   (e) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3. A interseção entre o cilindro $x^2 + z^2 = 1$, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o semi-espaço $y \le 0$ é

   (a) uma circunferência em um plano paralelo ao plano $xz$.
   (b) uma circunferência em um plano paralelo ao plano $xy$.
   (c) uma elipse em um plano paralelo ao plano $yz$.
   (d) duas elipses, cada uma em um plano paralelo ao plano $xy$.
   (e) duas circunferências, cada uma em um plano paralelos ao plano $xz$.

4. Seja $y = y(x)$ a solução de $y'' - 3y' + 2y = 10\,\mathrm{sen}\,x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. Então $y(\pi)$ vale

   (a) $-3$.
   (b) $-1$.
   (c) 0.
   (d) 1.
   (e) 3.

5. Uma curva plana, $\mathcal{C}$, é parametrizada por $(x, y) = (f(s), g(s))$, $0 \le s \le L$. Suponha que a parametrização seja diferenciável. Qual afirmação abaixo está correta?

   (a) Se $f(s) = s$, então o comprimento da curva é maior ou igual a $L$.
   (b) Se $|f'(s)| \le 1$, então o comprimento da curva é menor ou igual a $L$.
   (c) Se a curva é uma circunferência, então o comprimento da curva é $2\pi L$.
   (d) Se o comprimento do vetor tangente $(f'(s), g'(s))$ é constante em $s$, então a curva é um segmento de reta.
   (e) Se $(f(0), g(0)) = (0, 0)$ e $(f(L), g(L)) = (2, 2)$, então existe um valor $s^* \in (0, L)$ do parâmetro tal que $(f(s^*), g(s^*)) = (1, 1)$.

6. Seja $S$ a superfície dada por $x^2 + 9z^2 - 2x - y = 0$ e considere as seguintes afirmações:

   I. $S$ é um hiperbolóide de uma folha
   II. A interseção entre $S$ e o plano $z = 1$ é uma parábola neste plano.
   III. A interseção entre $S$ e o plano $y = -x$ é vazia

   Indique a alternativa correta.

   (a) A afirmação II é verdadeira e I e III são falsas.
   (b) As afirmações I e III são verdadeiras e II é falsa.
   (c) As afirmações II e III são verdadeiras e I é falsa.
   (d) Todas as afirmações são verdadeiras.
   (e) Todas as afirmações são falsas.

7. Considere as afirmações:

   **I.** A diferença entre duas soluções particulares da equação $y'' + by' + cy = f(x)$ é uma solução da equação $y'' + by' + cy = 0$.
   **II.** A função $y(x) = 2e^x + \cos x$ é solução de uma equação da forma $y'' + by' + cy = 0$, para algum par de constantes $b$ e $c \in \mathbb{R}$.
   **III.** Todas as soluções de uma equação da forma $y' + p(x)y = 0$ são múltiplas de uma mesma função.
   **IV.** Nem toda equação diferencial separável é necessariamente linear.

   Marque a alternativa correta.

   (a) Apenas a afirmação II é falsa.
   (b) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
   (c) Todas as afirmações são verdadeiras.
   (d) Apenas as afirmações III e IV são falsas.
   (e) Apenas as afirmações I e III são falsas.

8. Se a função $y = e^{-2x}\cos x$ é solução da equação $y'' + ay' + 5y = 0$ então o valor de $a$ é
   (a) 4
   (b) 0
   (c) -4
   (d) 2
   (e) -2

9. Considere a curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t^2), \quad t \geq 0.$$

   Em qual ponto da curva o vetor tangente faz um ângulo $\frac{\pi}{6}$ com o vetor $(0, 0, 1)$?
   (a) $\mathbf{r}(\sqrt{3})$
   (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi^2}{16})$
   (c) $(\sqrt{3}, 1, \frac{\pi^2}{36})$
   (d) $\mathbf{r}(\sqrt{2})$
   (e) $(0, 2, \frac{\pi^2}{4})$

10. Considere as retas parametrizadas por
$\mathbf{r}_1(t) = (1 + 2t, 1 + t, 1 + 3t)$ e
$\mathbf{r}_2(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}$.
Qual dos planos abaixo contém ambas as retas?
   (a) $x + y - z - 1 = 0$.
   (b) $-x - y + z - 1 = 0$.
   (c) $x - y + z - 1 = 0$.
   (d) $-x - y - z + 3 = 0$.
   (e) $-3x - 3y + 3z + 2 = 0$.

11. Um tanque contém 15 kg de sal dissolvidos em 6000 litros de água. Água salgada com concentração de $0,04$ kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 20 litros por minuto. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa, de tal modo que o volume de líquido no tanque permaneça constante. Se $q(t)$ representa a quantidade de sal (em kg) no tanque, como função do tempo (em minutos), então
   (a) $q(t) = 240 - 225e^{-t/300}$.
   (b) $q(t) = 0,8 - 15e^{-300t}$.
   (c) $q(t) = 15 + 20t$.
   (d) $q(t) = 15 - 0,8e^{-300t}$.
   (e) $q(t) = 225 - 240e^{-t/300}$.

12. Seja $\mathcal{C}$ a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos^2(t), \operatorname{sen}^2(t), \operatorname{sen}^2(t))$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Considere as afirmações abaixo:
   I. O vetor $(1, 1, 0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente à curva $\mathcal{C}$.
   II. O comprimento da curva $\mathcal{C}$ é maior do que 2.
   III. A curva $\mathcal{C}$ está contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
   IV. A curva $\mathcal{C}$ está contida na interseção dos planos $x + y = 1$ e $y = z$.

   (a) As afirmações II. e III. são falsas.
   (b) As afirmações II. e IV. são falsas.
   (c) As afirmações I. e III. são falsas.
   (d) As afirmações I. e IV. são falsas.
   (e) Todas as afirmações são falsas.

13. O conjunto dos pontos equidistantes do ponto $(0, 5, 1)$ e do plano $y = 3$ é composto por
   (a) um parabolóide.
   (b) um plano.
   (c) dois planos.
   (d) um hiperbolóide.
   (e) um elipsóide.