Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova Unificada de Cálculo 2 - 2015/1

Engenharia e Engenharia Química

05/05/2015

1ª Questão: (2.5 pts)

(1) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$$

(2) Determine o valor de v_0 de modo que a solução da equação acima com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = v_0$ seja limitada no intervalo $[0, +\infty)$.

Solução: (a) A solução geral da equação é da forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Como a equação característica é $r^2 + r - 2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = -2$, temos

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Como o termo não homogêneo é um caso particular de $y_h(x)$, devemos determinar $y_p(x)$ na forma

$$y_p(x) = Axe^{-2x}.$$

Assim,

$$\begin{cases} y_p'(x) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}, \\ y_p''(x) = -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}. \end{cases}$$

Substituindo na equação, obtém-se $A = -1$. Logo, a solução geral é:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - xe^{-2x}.$$

(b) pelas as condições iniciais dadas, obtemos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 = v_0 + 1. \end{cases}$$

Do sistema acima, obtemos

$$C_1 = 1 + \frac{v_0}{3}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{3}.$$

Logo,

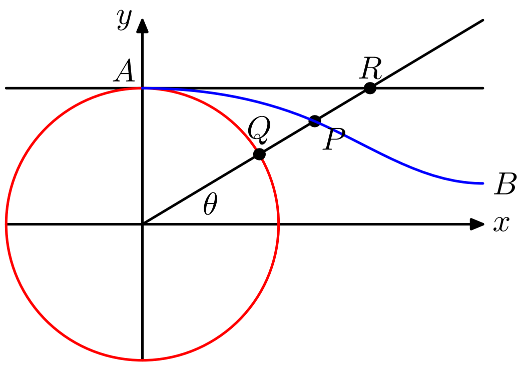
$$y(x) = \left(1 + \frac{v_0}{3}\right) e^{x} - \left(x + \frac{v_0}{3}\right) e^{-2x}.$$

Observemos que $y = Ce^x$ é limitada em $[0, +\infty)$ se, e somente se, $C = 0$. Logo, $v_0 = -3$ é condição necessária para que $y(x)$ seja limitada em $[0, +\infty)$. Neste caso, temos $y(x) = (1 - x)e^{-2x}$ que é limitada no intervalo $[0, +\infty)$. De fato, observe que $y(x)$ é função contínua, cresce no intervalo $[0, 2/3]$, decresce em $[2/3, +\infty)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - x)e^{-2x} = 0.$$

2ª Questão: (2.5 pts)

A reta que passa pela origem $O = (0, 0)$ e faz um ângulo θ com o eixo x, intercepta a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ no ponto Q. Seja P o ponto médio do segmento $\overline{QR}$ na figura abaixo. Determine as coordenadas de P em função do ângulo θ. (Quando o ângulo θ varia de $\pi/2$ a zero, o ponto P percorre a curva AB da figura).



Solução: Denotemos $Q = (q_1, q_2)$, $R = (r_1, r_2)$ e $P = (x(\theta), y(\theta))$. Como Q é ponto da circunferência, temos $q_1 = a\cos(\theta)$ e $q_2 = a\,\mathrm{sen}(\theta)$. Do triângulo retângulo com vértices em O, R e $(r_1, 0)$, obtemos

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{a}{r_1}.$$

Logo $R = (a\,\mathrm{cotg}(\theta), a)$. Como P é pont médio do segmento $\overline{QR}$, segue que a abscissa de P é ponto médio do intervalo $[q_1, r_1]$, isto é

$$x(\theta) = \frac{q_1 + r_1}{2} = \frac{a\cos(\theta) + a\,\mathrm{cotg}(\theta)}{2} = \frac{a}{2}\cos(\theta)\left(1 + \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\right).$$

Analogamente,

$$y(\theta) = \frac{q_2 + r_2}{2} = \frac{a\,\mathrm{sen}(\theta) + a}{2} = \frac{a}{2}\big(1 + \mathrm{sen}(\theta)\big).$$

Gabarito das questões de múltipla escolha

Questão 1. *A solução geral de $e^{2t}y' + 2e^{2t}y = e^t$ é:*

Solução: Observe que $(e^{2t}y)' = e^{2t}y' + 2e^{2t}y$. Logo,

$$(e^{2t}y)' = e^t \iff e^{2t}y = e^t + C \iff y = e^{-t} + Ce^{-2r}.$$

Resposta: Nenhuma das alternativas.

Questão 2. *Sabe-se que $y = C_1\cos(2t) + C_2\,\mathrm{sen}(2t)$ é solução de $y'' + ay' + by = 0$. Quanto valem a e b?*

Solução: Se $y = C_1\cos(2t) + C_2\,\mathrm{sen}(2t)$ é a solução de uma equação homogênea, então $r = \pm 2\,\mathrm{i}$ são as raízes da equação característica $r^2 + 2 = 0$, o que corresposnde à EDO $y'' + 4y = 0$.
Resposta: $a = 0$ e $b = 4$.

Questão 3. *Um tanque contém $100L$ de água. Uma solução com concentração salina de $0,5Kg/L$ é adicionada à taxa de $6L/min$. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de $3L/min$. Se $y(t)$ é a quantidade de sal (em quilogramas) após t minutos, qual é a equação diferencial que modela essa mistura?*

Solução: Sejam $y(t)$ a quantidade de sal e $V(t)$ o volume da solução no tanque, no instante t. Então, é claro que $V(t) = 100 + 3t$ Litros. Além disso,

1. A taxa de entrada é: 0.5 Kg/L $\times\, 6,0\,$L/min $= 3,0\,$Kg/min,
2. A taxa de saída é: $y(t)/V(t)\,$Kg/L $\times\, 3,0\,$L/min $= 3y(t)/V(t)\,$Kg/min.

Logo a taxa de variação da quantidade de sal no tanque é:
Resposta: $\dfrac{dy}{dt} = 3 - \dfrac{3y}{100+3t}$ (Kg/min).

Questão 4. *Considere a curva C parametrizada por $\boldsymbol{r}(t) = (e^t - t, 4e^{t/2})$. $t \in \mathbb{R}$. O comprimento do arco de C compreendido entre os pontos $\boldsymbol{r}(0)$ e $\boldsymbol{r}(1)$ é:*

Solução: O comprimento da curva é dado pela fórmula:

$$L = \int_0^1 \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Mas,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (e^t - 1, 2e^{t/2}) \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| = e^t + 1 \quad \Rightarrow \quad L = \int_0^1 (e^t + 1)\, dt = e.$$

Resposta: $L = e$.

Questão 5. *Encontre o ponto da curva parametrizada por* $\boldsymbol{r}(t) = (3t^2 - 3t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ *em que o vetor tangente é paralelo ao vetor* $\boldsymbol{u} = (1,1)$.

Solução: O vetor tangente $\boldsymbol{r}'(t_0)$ é paralelo ao vetor $\boldsymbol{u} = (1,1)$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{r}'(t_0) = \lambda \boldsymbol{u}$, isto é,

$$6t_0 - 3 = \lambda, \quad 3t_0^2 = \lambda.$$

Portanto,

$$t_0^2 = 2t_0 - 1 \iff t_0^2 - 2t_0 + 1 = 0 \iff (t_0 - 1)^2 = 0 \iff t_0 = 1.$$

Resposta: $\boldsymbol{r}(1) = (0,1)$.

Questão 6. *Seja C a curva parametrizada por* $\boldsymbol{r}(t) = (\text{sen}(t), t^2 + 2, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Determine os valores de t_0 tais que a reta tangente a C no ponto $\boldsymbol{r}(t_0)$ intersepta o eixo dos x.*

Solução: A equação paramétrica da reta tangente à curva no ponto $\boldsymbol{r}(t_0)$ é:

$$\boldsymbol{P}(s) = \boldsymbol{r}(t_0) + s\boldsymbol{r}'(t_0) = \big(\text{sen}(t_0) + s\cos(t_0),\, t_0^2 + 2 + 2st_0,\, t_0 + s\big).$$

Para que $\boldsymbol{P}(s)$ intersepte o eixo x, é necessário que, para algum $s \in \mathbb{R}$, suas duas últimas coordenadas se anulem, isto é:

$$t_0^2 + 2 + 2st_0 = 0, \quad t_0 + s = 0.$$

Logo,

$$s = -t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0^2 + 2 - 2t_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{2}.$$

Resposta: $t_0 = \sqrt{2}$.

Questão 7. *As curvas C_1 e C_2 parametrizadas respectivamente por*

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \big(e^{t^2 - t/2}, \text{sen}(t\pi)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{r}_2(s) = \big((s-1)^2 + 1, s\big), \quad s \in \mathbb{R},$$

passam pelo ponto $P = (1,1)$. O ângulo formado pelos vetores tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P é:

Solução: Como as duas curvas se interseptam, existe s_0 e t_0 tais que

$$\boldsymbol{r}_1(t_0) = \boldsymbol{r}_2(s_0) = (1,1).$$

Assim, igualando as coordenadas,

$$\operatorname{sen}(t_0\pi) = 1, \quad e^{t_0^2 - t_0/2} = 1, \quad (s_0 - 1)^2 + 1 = 1, \quad s_0 = 1,$$

de onde se conclui que

$$t_0 = 1/2, \quad s_0 = 1.$$

Portanto, os vetores tangentes são:

$$\boldsymbol{r}_1(1/2) = (1, 0), \qquad \boldsymbol{r}_2(s_0) = (0, 1),$$

que são ortogonais, isto é, formam entre si um ângulo $\theta = \pi/2$.
Resposta: $\theta = \pi/2$.