UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PROVA FINAL UNIFICADA – CÁLCULO II
Politécnica, Engenharia Química - 02/12/2014.

1ª Questão (*2,1 pontos*). Dada a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Mostre que o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ao longo de qualquer reta $y = mx$.

(b) A função é contínua na origem? Justifique sua resposta.

(c) A função é diferenciável na origem? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Temos $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{2x^4+m^2} = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

(b) A função não é continua na origem, pois ao longo da curva $y = x^3$, obtém-se $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6}{2x^6+x^6} = \dfrac{1}{3} \neq 0$, que é o limite encontrado em (a). Assim, o limite não existe.

(c) A função não é diferenciável na origem, pois ela não é contínua. (Toda função diferenciável é contínua).

2ª Questão (*3 pontos*). A temperatura (em graus Celsius °C) em uma placa de metal é dada por $T(x,y) = 36 - 2x^2 - 4y^2$, onde x e y são medidos em centímetros. Um objeto está no ponto $P = (2,1)$.

(a) Determine as equações paramétricas da curva de nível de T (chamada isoterma) que passa pelo ponto $P = (2,1)$.

(b) Em que direção, a partir de P, a taxa de variação de temperatura com relação à posição é máxima ? E qual é a taxa nesta direção, em °C/cm ?

(c) Se o objeto seguir na direção do vetor $\mathbf{v} = (1,1)$, ele estará se aquecendo ou esfriando? (Justifique!).

(d) Determine os vetores unitários $\mathbf{u}$ de modo que a taxa de variação de T no ponto P na direção $\mathbf{u}$ seja dada por $-8°C/\text{cm}$.

(e) Se o objeto percorrer uma curva γ e sua posição em cada instante t (segundos) é dada por $r(t) = (t, t^2/4)$, determine sua taxa de variação de temperatura em relação ao tempo quando ele passar pelo ponto $Q = (4, 4)$.

Solução:

(a) Em $P = (2, 1)$, $T(P) = 24$ e a curva de nível é dada por $36 - 2x^2 - 4y^2 = 24 \Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 = 12$. Isso é uma ellipse de equações paramétricas $x(t) = \sqrt{6}\cos t$ e $y(t) = \sqrt{3}\,\text{sen}\, t$.

(b) A variação é máxima na direção do vetor gradiente: $\bigtriangledown T(P) = -8(1, 1)$. A taxa de variação é dada por $|| \bigtriangledown T(P)|| = 8\sqrt{2}\ °C/\text{cm}$.

(c) Se o objeto seguir na direção do vetor $v = (1, 1)$, ele estará esfriando, pois v tem direção e sentido contrário ao vetor gradiente e, portanto, se tomarmos o vetor unitário $w = \frac{v}{|v|}$, a derivada direcional $D_w T(2, 1) = (-8, -8) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = -8\sqrt{2}$.

(d) Procuramos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ unitários tais que $\bigtriangledown T(P) \cdot \mathbf{u} = -8$; isso é

$$\begin{cases} u_1 + u_2 &= 1 \\ u_1^2 + u_2^2 &= 1 \end{cases}$$

Obtemos duas soluções $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(e) Como $x = x(t) = t$ e $y = y(t) = \frac{t^2}{4}$, então, $T = T(x(t), y(t))$. Pela regra da cadeia, a taxa de variação de temperatura em relação ao tempo é:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -4x + (-8y)\frac{t}{2}$$

no tempo t =4 , tem-se,

$$\frac{dT}{dt} = -4.\,4 - 32\,.\,2 = \quad -80°C/\text{seg}$$

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 02/12/2014

PROVA FINAL UNIFICADA

1. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto $(1,2)$. Sabendo que a derivada direcional de f no ponto $(1,2)$, segundo a direção do vetor $(1,1)$, é $\sqrt{2}$, e que $f_x(1,2) = 3$, quanto vale $f_y(1,2)$?

   (a) -1
   (b) $\sqrt{2} - 3$
   (c) $\sqrt{2}/3$
   (d) $(\sqrt{2} - 3)/2$
   (e) a informação é insuficiente

2. Em relação aos pontos críticos $P_1 = (2, -6)$ e $P_2 = (-2, 6)$ da função $f(x,y) = x^2y + 2x^3 - 4y$, pode se dizer que :

   (a) P_1 e P_2 são pontos de sela
   (b) P_1 é ponto de máximo local e P_2 é ponto de mínimo local
   (c) P_1 é ponto de sela e P_2 é ponto de mínimo local
   (d) P_1 é ponto de sela e P_2 é ponto de máximo local
   (e) nenhum dos outros itens

3. Considere as superfícies $S_1 : \ 2x^2 - y^2 - e^z = 0$ e $S_2 : \ z = 3x^2y - 3y^2$.
   As equações paramétricas da reta tangente à curva $\gamma = S_1 \cap S_2$ no ponto $(1,1,0)$, são dadas por:

   (a) $x = 1 + t, \ y = 1 + 2t, \ z = 0$
   (b) $x = 1 + t, \ y = 1 + 2t, \ z = t$
   (c) $x = 1 + 4t, \ y = 1 - 2t, \ z = -t$
   (d) $x = 1 + 6t, \ y = 1 - 3t, \ z = -t$
   (e) nenhum dos outros itens

4. A curva parametrizada $(x(t), y(t), z(t)), \ t \in \mathbb{R}$, obtida pela interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + z^2 = 4$ é dada por:

   (a) $(2\cos t, 2 - 2\,\text{sen}\, t, 2\,\text{sen}\, t)$
   (b) $(4\cos t, 4 - 4\,\text{sen}\, t, 4\,\text{sen}\, t)$
   (c) $(4\cos t, 2 - 2\,\text{sen}\, t, 4\,\text{sen}\, t)$
   (d) $(2\cos t, 2, 2\,\text{sen}\, t)$
   (e) nenhum dos outros itens

5. Um tanque contém inicialmente 10 litros de água pura. Injeta-se no tanque uma solução clorada à taxa de 5 L/min., contendo 0,4 Kg/L. A solução bem misturada é retirada do tanque à taxa de 3 L/min.. A função $Q(t)$ que representa a quantidade de cloro após t minutos é solução do problema com condição inicial:

   (a) $\frac{dQ}{dt} = 2 - \frac{3Q}{10+2t}$, $Q(0) = 0$
   (b) $\frac{dQ}{dt} = 2 - \frac{3Q}{10+2t}$, $Q(0) = 10$
   (c) $\frac{dQ}{dt} = 20 - \frac{3Q}{10+2t}$, $Q(0) = 0$
   (d) $\frac{dQ}{dt} = 10 + 2t - 3Q$, $Q(0) = 0$
   (e) $\frac{dQ}{dt} = 20 - \frac{3Q}{10+5t}$, $Q(0) = 10$

6. A EDO $x'' - 4x = te^t + \cos 2t$ possui uma solução geral da forma:

   (a) $x(t) = (At + B)e^t + C\cos 2t + D\,\text{sen}\ 2t + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$
   (b) $x(t) = (At+B)e^t + Ct\cos 2t + Dt\,\text{sen}\ 2t + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$
   (c) $x(t) = (At + B)e^t + c_1e^{2t}\cos 2t + c_2e^{-2t}\,\text{sen}\ 2t$
   (d) $x(t) = Ate^t + C\cos 2t + D\,\text{sen}\ 2t + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$
   (e) $x(t) = t[(At+B)e^t + C\cos 2t + D\,\text{sen}\ 2t] + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$

7. A reta normal à superfície $xyz = 4$ no ponto $P = (2,2,1)$ intercepta o plano $x = 0$ no ponto:

   (a) $(0, 0, -3)$
   (b) $(0, 1, -1)$
   (c) $(0, 0, 0)$
   (d) $(0, -1, 0)$
   (e) $(0, 2, 1)$