UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
SEGUNDA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO II
Politécnica, Engenharia Química e Ciência da Computação - 18/11/2014

1ª Questão (*2.5 pontos*). Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^3}{3} - 9y + x^2$

(a) Determine e classifique os pontos críticos de f em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine os pontos de máximo e mínimo de f sobre a circunferência:

$$x^2 + (y+3)^2 = 9$$

(c) Determine os valores máximo e mínimo de f no disco

$$D = \{(x,y) \ : \ x^2 + (y+3)^2 \leq 9\}$$

e os pontos onde estes valores ocorrem.

2ª Questão (*2.6 pontos*). Seja S a superfície dada pela equação $z = x^2 - y^2$.

(a) Determine a equação do plano tangente T, num ponto genérico (a,b,c) de S.

(b) Determine os pontos de S, onde o plano tangente é paralelo ao plano

$$4x + 2y + z = 11$$

(c) Determine os valores numéricos de c e descreva a curva formada pelos pontos (a,b,c) de S, de tal modo que o plano tangente T, encontrado em (a), contenha a origem.

1ª Questão (*2.5 pontos*). Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^3}{3} - 9y + x^2$

(a) $\bigtriangledown f(x,y) = (2x, y^2 - 9) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0, \pm 3) \Rightarrow P_1 = (0,3)$ e $P_2 = (0,-3)$ são os pontos críticos.

Classificação:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y$$

Assim, para o ponto P_1, tem-se $B^2 - AC = 0 - 2(2.3) < 0$ e $A > 0$. Logo, P_1 é mínimo local.

Para o ponto P_2, tem-se $B^2 - AC = 0 - 2(2.(-3)) > 0$. Logo, P_2 é ponto de sela.

(b) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda 2x \\ y^2 - 9 & = & \lambda 2(y+3) \\ x^2 + (y+3)^2 & = & 9 \end{array} \right.$$

Da primeria equação, $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Se $\lambda = 1$ então, $y^2 - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \pm 4$.

Se $y = 5$, substituindo-se na última equação obtém-se $x^2 = -55$, o que é impossível.

Se $y = -3$, substituindo-se na última equação obtém-se $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. Assim, temos os pontos $P_3 = (3,-3)$ e $P_4 = (-3,-3)$.

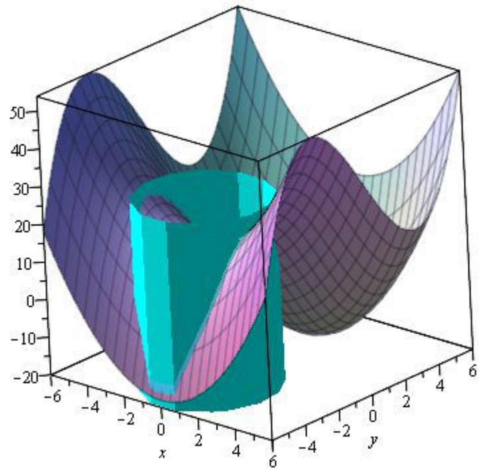
Se $x = 0$, substituindo-se na última equação obtém-se $(y+3)^2 = 9 \Rightarrow y = 0$ e $y = -6$. Assim, temos os pontos $P_5 = (0,0)$ e $P_6 = (0,-6)$.

$$f(P_3) = f(P_4) = 27 \quad f(P_5) = 0 \quad \text{e} \quad f(P_6) = -18$$

Logo, P_3 e P_4 são pontos de máximo e P_6 é ponto de mínimo sobre a circunferência $x^2 + (y+3)^2 = 9$.

(c) f é um função continua em $\mathbb{R}^2$, o disco D é fechado e limitado, então f atinge um valor máximo e um valor mínimo. Agora, observe que apenas os pontos, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 estão no disco D.

Logo, P_3 e P_4 são pontos de máximo e P_6 é ponto de mínimo sobre o disco $x^2 + (y+3)^2 \leq 9$.



2ª Questão (*2.6 pontos*). Seja S a superfície dada pela equação $z = x^2 - y^2$.

(a) $T_{(a,b,c)}S : z = c + 2a(x-a) - 2b(y-b)$ onde $c = a^2 - b^2$. Isso é

$$z = 2ax - 2by - a^2 + b^2$$

(b) Queremos que $(2a, -2b, -1)$ (vetor normal do plano tangente) seja colinear a $(4, 2, 1)$ (vetor normal do plano). Fazendo $(4, 2, 1) = \lambda(2a, 2b, -1)$ obtemos $\lambda = -1$ e então um único ponto onde os planos são paralelos é $(-2, 1, 3)$

(c) Queremos que $(0, 0, 0)$ seja solução da equação de $T_{(a,b,c)}S$ o que dá $0 = -a^2 + b^2$. Assim $a^2 = b^2$ e $c = 0$ o que caracteriza as duas retas $y = \pm x$ no plano $z = 0$.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemátcia
Disciplina: Cálculo II
Data: 18/11/2014

SEGUNDA PROVA UNIFICADA

1. Considere a superfície S de equação $x+2=xy^2+zx$. Se o vetor $\mathbf{v}=(a,b,c)$ é tangente a S em $(1,1,2)$, então:
   (a) $2a+2b+c=0$
   (b) $2a+2b+c=1$
   (c) $2a+2b-c=0$
   (d) $3a+2b+c=2$
   (e) $a+3b+2c=0$

2. Seja $2x-3y+z=1$ a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(3,2)$. Se $x=u^2+2$, $y=2uv$ e $F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$, o valor de $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1,1)$ é:
   (a) 2
   (b) -2
   (c) 0
   (d) 4
   (e) -6

3. Considere $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$. Se $\mathbf{v}=(a,b)$ é um vetor unitário tal que $D_{\mathbf{v}}f(2,1)$ é máxima, então $a+b$ vale:
   (a) $1/\sqrt{5}$
   (b) $-1/5$
   (c) $2/\sqrt{5}$
   (d) 2
   (e) -2

4. Suponha a função $f(x,y,z)$ tem um ponto crítico em (x_0,y_0,z_0) no espaço. Se $a>0$ e $b>0$ são números reais positivos, então a função $g(x,y,z)=af(x,y,z)+b$ tem um ponto crítico em
   (a) (x_0,y_0,z_0)
   (b) $a(x_0,y_0,z_0)$
   (c) $\frac{1}{a}(x_0,y_0,z_0)$
   (d) $a(x_0,y_0,z_0)+b$
   (e) a informação é insuficiente

5. Considere os seguintes limites:
$$i)\ \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\qquad ii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^4}.$$
   Então:
   (a) i) existe; ii) não existe
   (b) i) existe; ii) existe
   (c) i) não existe; ii) existe
   (d) i) não existe; ii) não existe
   (e) nenhuma das outras opções

6. Seja $f(x,y)$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas no ponto $(2,1)$. Assuma que $(2,1)$ é um ponto crítico de f e que $f_{xx}(2,1)=1$, $f_{xy}(2,1)=2$. Então $(2,1)$ é um ponto de mínimo local de f se:
   (a) $f_{yy}>4$
   (b) $f_{yy}<4$
   (c) $f_{yy}<2$
   (d) $f_{yy}>2$
   (e) a informação é insuficiente

7. Seja
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } y>x\\ x+y & \text{se } y\le x\end{cases}$$
   Então f possui:
   (a) infinitos pontos de descontinuidade
   (b) apenas um ponto de descontinuidade
   (c) nenhum ponto de descontinuidade
   (d) apenas dois pontos de descontinuidade
   (e) nenhuma das outras opções