UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PRIMEIRA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO II
Politécnica, Engenharias 25/09/2014

1ª Questão. (*2.2 pontos*). Considere as duas superfícies dadas por $2x+2y+z=1$ e $x^2+y^2=1+z$.

1. Esboce, separadamente, as duas superfícies, mostrando as curvas de interseção com os planos coordenados.

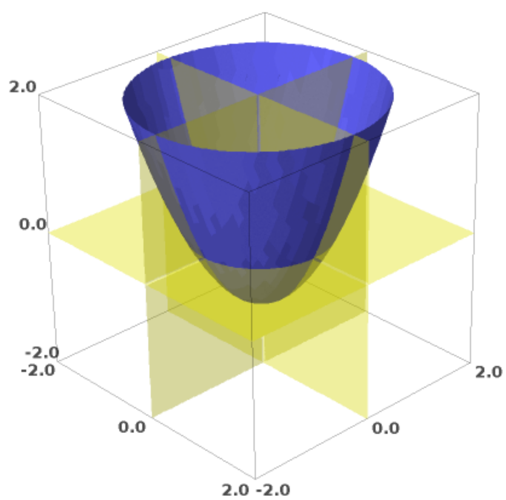

Figura 1: S_2 e os planos coordenados

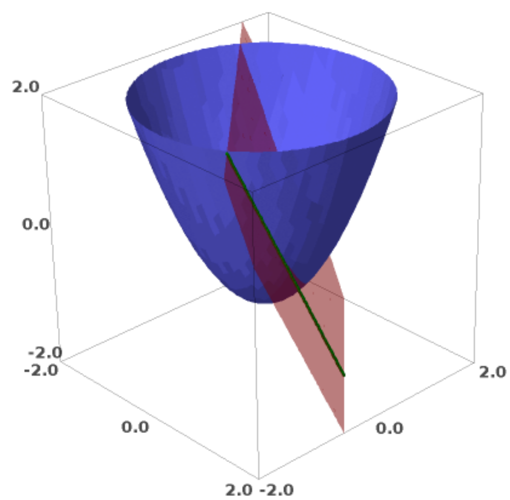

Figura 2: $S_1 \cup S_2 \cup T_p\mathcal{C}$

2. Parametrize a curva $\mathcal{C}$ obtida pela interseção das 2 superfícies.

Substituindo $z=x^2+y^2-1$ na primeira equação, obtemos $2x+2y+x^2+y^2-1=1$ ou seja $(x+1)^2+(y+1)^2=4$ que é a equação do círculo de centro $(-1,-1)$ e raio 2.
Esse círculo é a projecção de $\mathcal{C}$ sobre O_{xy}. Então, $x(t)=-1+2\cos(t)$ e $y(t)=-1+2\,\mathrm{sen}(t)$ convêm. Logo, a primeira equação dá $z(t)=1-2(-1+2\cos(t)-1+2\,\mathrm{sen}(t))=5-4(\cos(t)+\mathrm{sen}(t))$ com $0\le t\le 2\pi$.

3. Calcule a reta tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $p=(1,-1,1)$.

A reta tangente no ponto $(1,-1,1)=(x(0),y(0),z(0))$ tem vetor diretor dirigida por $(x'(0),y'(0),z'(0))=(0,2,-4)$. Portanto uma parametrização é $\gamma(t)=(1,-1,1)+t(0,1,-2)$, $t\in\mathbb{R}$.

4. Existe algum ponto de $\mathcal{C}$ no qual a reta tangente passe na origem? Justifique.

A curva $\mathcal{C}$ está contida no plano $2x + 2y + z = 1$, assim como suas retas tangentes.Como o plano não passa pela origem, então não existe tal ponto.

2ª Questão. (*2.2 pontos*). Resolva o problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = e^x \cos(2x) \\ \\ y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear da segunda ordem com coeficientes constantes. Seu polinômio característico é $X^2 - 4X + 5 = (X - 2 - i)(X - 2 + i)$ portanto a solução geral da equação homogênea associada é

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x))$$

A função $e^x \cos(2x)$ não é solução da equação homogênea, portanto tentemos uma solução particular do tipo $y_p(x) = e^x(A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x))$. Derivando y, obtemos

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^x \left\{(A + 2B)\cos(2x) + (B - 2A)\operatorname{sen}(2x)\right\}; \\ y''(x) &= e^x \left\{(A + 2B + 2(B - 2A))\cos(2x) + (B - 2A - 2(A + 2B))\operatorname{sen}(2x)\right\} \\ &= e^x \left\{(-3A + 4B)\cos(2x) - (4A + 3B)\operatorname{sen}(2x).\right\} \end{aligned}$$

Substituindo na equação e dividindo por e, obtemos
$((-3A + 4B) - 4(A + 2B) + 5A)\cos(2x) + (-(4A + 3B) - 4(B - 2A) + 5B)\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)$.

O que resulte no sistema $\begin{cases} -2A - 4B &= 1 \\ 4A - 2B &= 0 \end{cases}$ ou seja $\begin{cases} A &= -1/10 \\ B &= -1/5 \end{cases}$

Assim, a solução geral é

$$y(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x))e^{2x} - \frac{1}{10}(\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x))e^x$$

Aplicando as condições do contorno obtemos $\begin{cases} C_1 - 1/10 &= 0 \\ C_2 e^{\pi} + \frac{1}{10}e^{\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{cases}$

isso é

$$\begin{cases} C_1 &= 1/10 \\ C_2 &= -\frac{1}{10}e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

Em conclusão, a solução do problema é

$$y(x) = \frac{1}{10}\left\{(cos(x) - e^{-\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(x))e^{2x} - (\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x))e^x\right\}.$$