NOME:____

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Prova Final de Cálculo II
27/05/2014
Politécnica - Engenharia Química

1ª **QUESTÃO** (2,0 pts): Determine a solução geral da equação

$$x'' - 4x' + 4x = (t^2 + 1)e^t + 2e^{2t}$$

Solução:
Equação característica: $r^2 - 4r + 4r = 0$
Raízes: $r = 2$ (raiz dupla)
Solução da equação homogênea associada: $x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$
Considere a equação

$$x'' - 4x' + 4x = (t^2 + 1)e^t \tag{1}$$

Uma solução particular para esta equação é $x_{p_1} = (a + bt + ct^2)e^t$. Então,

$$x'_{p_1} = (b + 2ct)e^t + (a + bt + ct^2)e^t$$

e

$$x''_{p_1} = 2ce^t + (b + ct)e^t + (b + 2ct)e^t + (a + bt + ct^2)e^t$$

Substituindo-se na equação 1 encontramos o sistema:

$$\begin{aligned} 2c - 2b + a &= 1 \\ -4c + b &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_1} = (7 + 4t + t^2)e^t \tag{2}$$

Agora, considere a equação

$$x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} \tag{3}$$

Uma solução particular para esta equação é $x_{p_2} = kt^2e^{2t}$. Então,

$$x'_{p_2} = k(2te^{2t} + 2t^2e^{2t})$$

e

$$x''_{p_2} = k(2e^{2t} + 4te^{2t} + 4te^{2t} + 4t^2e^{2t})$$

Substituindo-se em 3, obtém-se

$$k = 1$$

Assim,

$$x_{p_2} = t^2e^{2t}$$

Logo, a solução geral da equação $x'' - 4x' + 4x = (t^2+1)e^t + 2e^{2t}$ é

$$x(t) = x_{p_1} + x_{p_2} + x_h = (7 + 4t + t^2)e^t + t^2e^{2t} + (c_1 + c_2 t)e^{2t}$$

$2^{\underline{a}}$ **QUESTÃO** (2,4 pts): Considere a superfície quádrica S dada pela equação

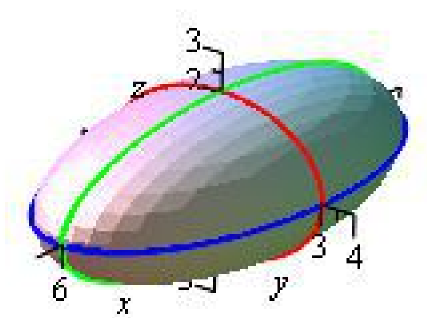
$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

(a) Identifique e esboce o gráfico de S mostrando as curvas de interseção com os planos coordenados, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

(b) Determine as equações paramétricas da curva γ, interseção de S com o plano $x = 0$.

(c) Determine as equações paramétricas dos planos tangentes à S que são paralelos ao plano $x - 4y + 9z = 1$.

Solução: (a) p/ $x = 0 \Longrightarrow 4y^2 + 9z^2 = 36 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, (elipse cor vermelha)
p/ $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 9z^2 = 36$ (elipse cor verde)
p/ $z = 0 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 36$ (elipse cor azul)
Portanto, trata-se de um elipsoide.



(b) p/ $x = 0 \Longrightarrow 4y^2 + 9y^2 = 36 \Longleftrightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Logo, as equações paramétricas da elipse são:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 3\,\mathrm{sen}\, t \\ z &= 2\cos t \end{aligned}$$

para $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Um plano tangente a S em um ponto $P = (x, y, z)$ tem como vetor normal o vetor ortogonal a S neste ponto, que neste caso é o gradiente da função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36$, isto é,

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 8y, 18z)$$

Para que o plano tangente seja paralelo ao plano dado $x-4y+9z=1$ é necessário que o vetor gradiente $\nabla f(x,y,z)=(2x,8y,18z)$ seja paralelo ao vetor $(1,-4,9)$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 2x &=& \lambda \\ 8y &=& -4\lambda \\ 18z &=& 9\lambda \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{\lambda}{2} \\ y &=& -\dfrac{\lambda}{2} \\ z &=& \dfrac{\lambda}{2} \end{array}$$

Como o ponto pertence à S, tem-se,

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+4\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2+9\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2=36 \Longrightarrow (\lambda)^2=\frac{72}{7} \Longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{72}{7}}$$

Assim, os pontos de tangência a S são:

$$P_1=(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{7}}(1,-1,1) \quad \text{e} \quad P_2(x_2,y_2,z_2)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{7}}(1,-1,1)$$

e as equações dos planos tangentes:

$$(x-x_1)-4(y-y_1)+9(z-z_1)=0$$

e

$$(x-x_2)-4(y-y_2)+9(z-z_2)=0$$

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 27/05/2014

PROVA FINAL UNIFICADA

1. Encontre a derivada direcional de
$$f(x,y,z) = x^2yz - y^2z - \frac{x}{z}$$
no ponto $(1,2,-1)$ na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
   - **(a)** $-11/3$
   - (b) -6
   - (c) $-17/3$
   - (d) $1/3$
   - (e) Nenhuma das outras alternativas

2. A equação do plano tangente a superfície
$$z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$$
no ponto $(1,-1,1)$ é igual a:
   - **(a)** $x - 2y + z = 4$
   - (b) $2x - 2y + z = 5$
   - (c) $x - 2y + 2z = 5$
   - (d) $3x - 2y - z = 9$
   - (e) nenhumas das outras alternativas

3. Determine o comprimento da astroïde parametrizada por
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$$
   - **(a)** 6
   - (b) $3(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)$
   - (c) 2π
   - (d) 8
   - (e) $\frac{5\pi}{2}$

4. A solução de $y' = xy, \ y(0) = 0$ é
   - **(a)** $y = 0$
   - (b) $y = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$
   - (c) $y = 1 - e^{\frac{x^2}{2}}$
   - (d) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$
   - (e) nenhuma das outras alternativas

5. Considere a função
$$f(x,y) = x + 8y - \frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4},$$
o ponto $(1,2)$
   - **(a) é de máximo local**
   - (b) é de mínimo local
   - (c) é de mínimo global
   - (d) é de sela
   - (e) não é ponto crítico

6. Seja a equação diferencial (E): $y'' - 6y' + 9y = 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
   - **(a) A função $y(t) = e^{3t} - te^{3t}$ é a única solução de (E) verificando $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.**
   - (b) O real 3 é raiz simples da equação característica associada.
   - (c) A função $y(t) = e^{-3t} + 5te^{3t}$ é uma solução de (E) verificando $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.
   - (d) A função $y(t) = t(e^t + e^{3t})$ é solução de (E).
   - (e) Nenhuma das outras alternativas.

7. Duas partículas se movem no espaço e suas posições são dadas por
$$r_1(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{e} \quad r_2(t) = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$$
para $t \ge 0$. Suas trajetórias descrevem curvas C_1 e C_2, respectivamente.
   - **(a) As partículas não se chocam, porém as curvas C_1 e C_2 se interceptam nos pontos $(1,1,1)$ e $(2,4,8)$.**
   - (b) As curvas C_1 e C_2 não se interceptam.
   - (c) As partículas não se chocam, porém as curvas C_1 e C_2 se interceptam nos pontos $(1,1,1)$ e $(3,9,27)$.
   - (d) As partículas se chocam nos pontos $(1,1,1)$ e $(2,4,8)$.
   - (e) As partículas se chocam somente no ponto $(1,1,1)$.

8. A taxa com que o virus da gripe "C" se espalha em uma comunidade é proporcional ao número de pessoas infectadas vezes o número de pessoas não infectadas. No início da prova de Cálculo 2 em uma sala com 60 alunos, haviam 3 alunos gripadas e 2 horas depois 35 alunos estavam contaminados.
Seja $p(t)$ o número de pessoas gripadas após t minutos e $k \ge 0$. O modelo matemático que melhor representa este problema é:
   - **(a)** $\frac{dp}{dt} = kp(60-p), \ p(0) = 3, \ p(120) = 35$**.**
   - (b) $\frac{dp}{dt} = k3(60-p), \ p(0) = 0.$
   - (c) $\frac{dp}{dt} = k35(60-p), \ p(0) = 3.$

(d) $\dfrac{dp}{dt} = kp(35 - p),\ p(0) = 3.$

(e) $\dfrac{dp}{dt} = k35(60 - p),\ p(0) = 3,\ p(120) = 35.$