Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

$2^{\underline{a}}$ **Prova de Cálculo II**
16/05/2014
Politécnica - Engenharia Química

GABARITO

$1^{\underline{a}}$ **QUESTÃO** (2,4 pts): Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto $(1,2)$ e considere os vetores $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(a) Sabendo-se que

$$D_u f(1,2) = 1 \quad \text{e} \quad D_v f(1,2) = 3\,,$$

calcule $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$.

(b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,3)$, onde $f(1,2) = 3$.

(c) Considere uma curva no plano parametrizada por

$$r(t) = (x(t), 2 + t + t^2)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

onde $x(t)$ é uma função diferenciável tal que $x(0) = 1$. Sabendo-se que $\dfrac{dz}{dt}$ em $t = 0$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule $x'(0)$.

Solução: (a) Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(1,2) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(1,2) = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(1,2) - \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(1,2) = 3 \end{cases},$$

(somando e subtraindo as equações) obtemos $f_x(1,2) = 2\sqrt{2}$ e $f_y(1,2) = -\sqrt{2}$.

(b) Usando a alínea anterior, obtemos

$$z - f(1,2) = f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) \Leftrightarrow z = 3 + 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y.$$

(c) Primeiro observamos que $\mathbf{r}(0) = (1,2)$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))|_{t=0} = f_x(1,2)x'(0) + f_y(1,2)(1+2t)|_{t=0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,x'(0) - \sqrt{2} \Leftrightarrow x'(0) = \frac{3}{4}.$$

$2^{\underline{a}}$ **QUESTÃO** (2,0 pts): A temperatura em uma placa de metal é dada por

$$T(x,y) = 8x^2 - 24xy + y^2$$

.

(a) Determine e classifique os pontos críticos de T em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine os pontos onde ocorrem a maior e a menor temperatura na região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 8x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solução: (a)

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 24y = 0 \\ -24x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Logo $(0,0)$ é o único ponto crítico de T. Neste ponto,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -24 \\ -24 & 2 \end{vmatrix} < 0,$$

logo $(0,0)$ é ponto de sela.

(b) No interior de D o único canditado a ponto crítico é o ponto $(0,0)$, que pelo item (a) é um ponto de sela, logo está descartado de ser extremo em D.

Na fronteira de D, $8x^2 + y^2 = 1$, vamos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x,y) = 8x^2 + y^2$.

$$\begin{cases} \nabla T = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 24y = \lambda 16x & (1) \\ -24x + 2y = \lambda 2y & (2) \\ 8x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Resolvendo (1) em ordem a y, obtemos

$$y = \frac{2}{3}x(1-\lambda) \qquad (4)$$

Substituido (4) em (2), obtemos $12x = \frac{2}{3}x(1-\lambda)^2$, donde $x = 0$ ou $(1-\lambda)^2 = 18$.

Se $x = 0$, de (3) tiramos que $y = \pm 1$, porém, estes valores não satisfazem (1).

Se $(1-\lambda)^2 = 18$ então, por (4), $y^2 = 8x^2$, e, por (3), obtemos $x = \pm\frac{1}{4}$. Isto dá os pontos $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, com valores $1 - 3\sqrt{2}$, $1 + 3\sqrt{2}$, $1 + 3\sqrt{2}$ e $1 - 3\sqrt{2}$, respetivamente.

Portanto, o máximo de T em D é $1 + 3\sqrt{2}$, atingido nos pontos $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, e o mínimo de T em D é $1 - 3\sqrt{2}$, atingido nos pontos $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 13/05/2014

SEGUNDA PROVA UNIFICADA

1. Considere os seguintes limites:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}$.

Então:

(a) i) existe; ii) não existe
(b) i) existe; ii) existe
(c) i) não existe; ii) existe
(d) i) não existe; ii) não existe
(e) nenhuma das outras alternativas

2. Considere as seguintes afirmações:

i) Se $f(x,y)$ é contínua no ponto (a,b) então $f(x,y)$ é diferenciável no ponto (a,b)
ii) Se $f(x,y)$ é diferenciável no ponto (a,b) então $f(x,y)$ é contínua no ponto (a,b)
iii) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem no ponto (a,b) então $f(x,y)$ é diferenciável no ponto (a,b)

Então:

(a) i) F ii) V iii) F
(b) i) V ii) F iii) F
(c) i) V ii) F iii) V
(d) i) F ii) V iii) V
(e) i) F ii) F iii) F

3. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto $(2,1)$ tal que $f_x(2,1)=2$. Seja $\mathbf{r}(t)=(t+2,e^{2t})$.
Sabendo que

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))\Big|_{t=0} = -2,$$

quanto vale $f_y(2,1)$?

(a) -2
(b) -6
(c) 0
(d) 2
(e) nenhuma das outras alternativas

4. Seja

$$f(x,y)=x^4-y^4,$$

o ponto $(0,0)$

(a) é ponto de sela
(b) é ponto de mínimo local
(c) é ponto de máximo local
(d) não é ponto crítico
(e) nenhuma das outras alternativas

5. Suponha-se que a pressão atmosférica na posição (x,y,z) seja dada pela função

$$P(x,y,z)=4+\frac{x^2}{2}-3x^2e^z.$$

Se você está na posição $(1,2,0)$, encontre o vetor $\vec{u}$ que dá direção e sentido que você precisa se mover, a fim de diminuir a pressão atmosférica, o mais rápido possível.

(a) $\vec{u}=(5,0,3)$
(b) $\vec{u}=(-5,0,-3)$
(c) $\vec{u}=(-1,0,3)$
(d) $\vec{u}=(-5,0,0)$
(e) Nenhuma das outra alternativas

6. Considere a função

$$f(x,y)=4xy-x^4-y^4.$$

O ponto $(1,1)$

(a) é de máximo local
(b) é de mínimo global
(c) é de mínimo local
(d) é de sela
(e) não é um ponto crítico

7. Seja

$$f(x,y)=4x^2+y^2.$$

Determine a equação da reta tangente a curva de nível de $f(x,y)$ que passa pelo ponto $(1,2)$.

(a) $2x+y-4=0$
(b) $x-2y+5=0$
(c) $x+y-3=0$
(d) $8x+2y-4=0$
(e) $4x+y-6=0$

8. Considere a curva C formada pela interseção do paraboloide $2z=x^2+y^2$ com o elipsoide $2x^2+y^2+z^2=4$. A reta tangente a C no ponto $(1,1,1)$ intersecta o plano horizontal $z=0$

(a) no ponto $(3,-2,0)$
(b) no ponto $(1,1,0)$
(c) no ponto $(1,-\frac{1}{2},0)$
(d) no ponto $(\frac{1}{3},2,0)$
(e) em nenhum ponto, pois está paralela a esse plano