$1^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II
25/03/2014
Politécnica - Engenharia Química

$1^{\underline{a}}$ **QUESTÃO** (2,6 pts): Encontre a soluções das equações:

(a) $2\dfrac{dx}{dt} + 3x^2\cos t = 0$

(b) $y'' - y' - 2y = e^{-x} + 4$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

(a) *Observe que a função nula $x = 0$ é um a solução da equação. Assim, se $x \neq 0$, aplicando-se o método de separação de variáveis,*

$$2\frac{dx}{dt} + 3x^2\cos t = 0 \Longrightarrow 2\int \frac{1}{x^2}\,dx = -3\int \cos t\,dt \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 3\,\mathrm{sen}\,t + c$$

Logo,

$$x = \frac{2}{3\,\mathrm{sen}\,t + c}$$

(b) *Equação homogênea associada: $y'' - y' - 2y = 0$*
Equação característica: $r^2 - r = 0$
Raízes: $r_1 = 2$ e $r - 2 = -1$: reais e distintas. Assim, a solução da homogênea associada é:

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Para determinar uma solução particular para a equação dada, observe que o lado direito da equação é uma soma de uma exponencial com uma constante. Assim,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

onde y_{p_1} é uma solução particular de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ e y_{p_2} é uma solução particular de $y'' - y' - 2y = 4$. Determinemos, primeiro, y_{p_1}. Como a função do lado direito da equação $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ é uma função exponencial, a solução y_{p_1} deverá ser uma função do tipo ae^{-x}. Porém, esta função é solução da equação homogênea associada, assim,

$$y_{p_1} = axe^{-x} \Rightarrow y'_{p_1} = a(e^{-x} - xe^{-x}) \Rightarrow y''_{p_1} = a(-2e^{-x} + xe^{-x})$$

Substituindo na equação, tem-se,

$$a(2e^{-x} + xe^{-x}) - a(e^{-x} - xe^{-x}) - 2axe^{-x} = e^{-x} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Vamos, agora, determinar y_{p_2}. Como o lado direito da equação $y''-y'-2y = 4$ é uma constante, a solução particular será uma constante, isto é, $y_{p_2} = k$. Substituindo-se na equação, obtém-se $k = -2$. Logo,

$$y_p = -\frac{1}{3}xe^{-x} - 2$$

Portanto, a solução geral da equação é:

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{3}xe^{-x} - 2 + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Para calcular as constantes c_1 e c_2, utilizamos as condições iniciais do problema. Como

$$y' = -\frac{1}{3}(e^{-x} - xe^{-x}) + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$$

tem-se:

$$y(0) = -2 + c_1 + c_2 = -2$$

e

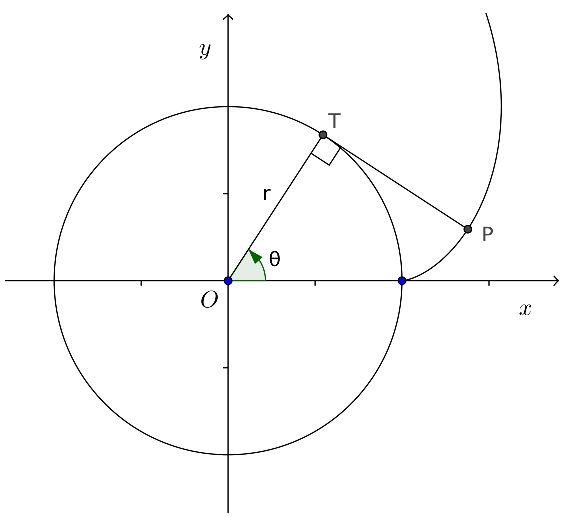
$$y'(0) = -\frac{1}{3} + 2c_1 - c_2 = 0$$

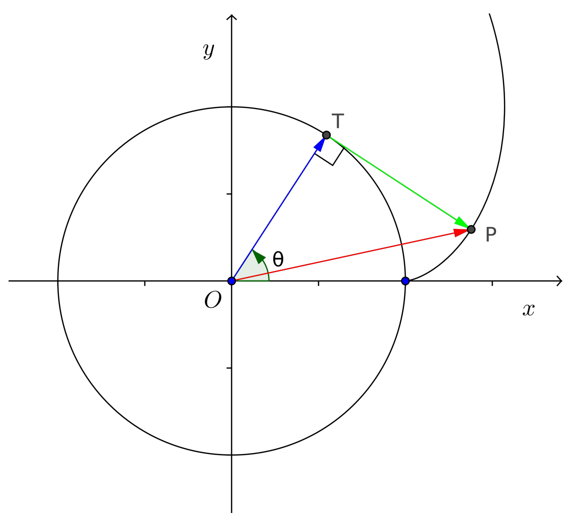
Este sistema tem solução $c_1 = 1/9$ e $c_2 = -1/9$. Assim,

$$y = -\frac{1}{3}xe^{-x} - 2 + \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{9}e^{-x}$$

$2^{\underline{a}}$ **QUESTÃO** *(2,5 pts): Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de involuta do círculo.*

Suponha que o círculo tem raio r e centro O e que a posição inicial de P seja $(r, 0)$. Se o parâmetro for escolhida como na figura, encontre as equações paramétricas da involuta.





A posição do ponto P é dada pelo vetor $\vec{OP} = \vec{OT} + \vec{TP}$ (veja figura).

O vetor $\vec{OT} = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e o vetor $\vec{TP}$ é perpendicular ao vetor $\vec{TP}$ e seu comprimento é igual ao comprimento do arco AB que é $r\theta$. Assim,

$$\vec{TP} = (r\theta\,\mathrm{sen}\,\theta, -r\theta\cos\theta)$$

Logo,

$$\vec{OP} = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + (r\theta\,\mathrm{sen}\,\theta, -r\theta\cos\theta) = r(\cos\theta + \theta\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II
Data: 25/03/2014

PRIMEIRA PROVA UNIFICADA

1. Considere a curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t, at), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

onde $a > 0$. Sabendo que o seu comprimento é $2\sqrt{5}\,\pi$, quanto vale a?

(a) $a = 2$
(b) $a = 1$
(c) $a = 0$
(d) $a = \pi$
(e) Nenhuma das outras alternativas

2. Encontre o fator integrante correto para a seguinte equação diferencial:

$$xy' = 2 + y, \qquad x > 0.$$

(a) $1/x$
(b) e^{x}
(c) e^{-x}
(d) $e^{\frac{x^2}{2}}$
(e) $e^{\frac{-x^2}{2}}$

3. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\operatorname{sen} t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

O plano perpendicular a $\mathcal{C}$ no ponto $(1, 1, \pi/4)$ é:

(a) $-x + y + z = \pi/4$
(b) $x + y + z = \pi/4 - 2$
(c) $x + y + \pi/4z = 1$
(d) $x - y + z = \pi/4$
(e) $-x + y + \pi/4z = 0$

4. Uma solução particular de

$$y'' + 2y' + 3y = \sin(\sqrt{2}\,x)$$

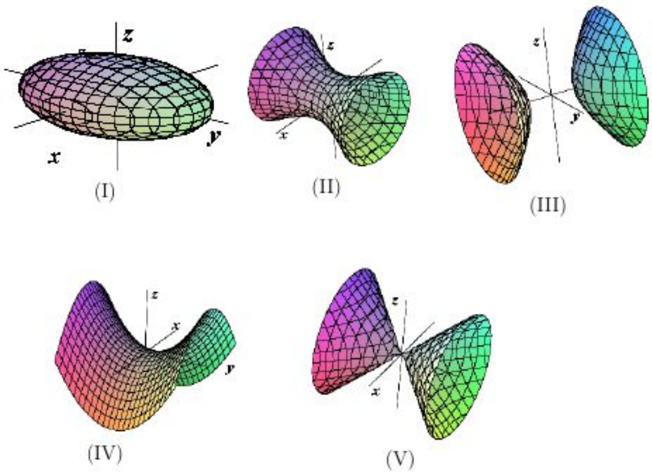
é do tipo:

(a) $A\cos(\sqrt{2}\,x) + B\sin(\sqrt{2}\,x)$
(b) $Ax\cos(\sqrt{2}\,x) + Bx\sin(\sqrt{2}\,x)$
(c) $A\sin(\sqrt{2}\,x)$
(d) $Ax\sin(\sqrt{2}\,x)$
(e) $A\cos(\sqrt{2}\,x)$

5. Um tanque possui 20 litros de solução com cloro numa concentração de 4 mg/L. Adiciona-se água ao tanque por uma mangueira numa taxa de 2 L/min contendo 3 mg/L de cloro e a solução homogênea sai do tanque por um orifício em sua base com vazão de 4 L/min. A quantidade $Q(t)$ de cloro da solução homogênea no tanque no instante t é solução do seguinte problema com condição inicial:

(a) $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{4}{20-2t}Q = 6$ **e** $Q(0) = 80$
(b) $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{4}{20+2t}Q = 6$ e $Q(0) = 80$
(c) $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{4}{4-2t}Q = 6$ e $Q(0) = 80$
(d) $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{4}{20-2t}Q = 6$ e $Q(0) = 4$
(e) $\dfrac{dQ}{dt} - \dfrac{2}{t}Q = 6$ e $Q(0) = 80$

6. Qual das superfícies de (I) à (V) corresponde ao gráfico da quádrica $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1$?



(a) **III**
(b) II
(c) I
(d) IV
(e) V

7. Considere a curva $\mathcal{C}$ como a interseção do plano $y = 2$ com o paraboloide $y = x^2 + z^2$. Uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$ é:

(a) $(\sqrt{2}\cos t, 2, \sqrt{2}\,\operatorname{sen} t)$**,** $t \in [0, 2\pi]$
(b) $(2, 2\cos t, 2\,\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$
(c) $(2\cos t, 2, 2\,\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$
(d) $(2\,\operatorname{sen} t, 2\,\operatorname{sen} t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$
(e) $(2\cos t, 2, 2\,\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$