UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PROVA FINAL UNIFICADA – CÁLCULO II
Politécnica, Engenharia Química e Ciência da Computação - 16/07/2013.

QUESTÕES DISCURSIVAS

1ª Questão: (*2.2 pontos*).

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$x'' + 2x' + 10x = 26\sin(2t), \quad x(0) = 1,\, x'(0) = 3.$$

Gabarito:
Solução homogenea: A equação caraterística $r^2 + 2r + 10 = 0$ tem solução $r = -1 \pm 3i$. Logo

$$x_h = e^{-t}\left(C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solução particular: $x_p = A\cos(2t) + B\ \mathrm{sen}\,(2t)$. Para x_p satisfazer a equação diferencial A e B têm de satisfazer:

$$(6A + 4B)\cos(2t) + (-4A + 6B)\ \mathrm{sen}\,(2t) = 26\ \mathrm{sen}\,(2t) \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} 6A + 4B = 0 \\ -4A + 6B = 26 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} A = -2 \\ B = 3 \end{array}$$

Logo,

$$x_p = -2\cos(2t) + 3\ \mathrm{sen}\,(2t)$$

Solução geral: $x(t) = -2\cos(2t) + 3\sin(2t) + e^{-t}\left(C_1\cos(3t) + C_2\ \mathrm{sen}\,(3t)\right)$, onde:

$$\begin{array}{c} x(0) = 1 \\ x'(0) = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} C_1 = 3 \\ C_2 = 0 \end{array}$$

Portanto,

$$x(t) = -2\cos(2t) + 3\ \mathrm{sen}\,(2t) + 3e^{-t}\cos(3t)$$

2ª Questão: (*2.2 pontos*).

Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 9x + y^2$

(a) Determine e classifique os pontos críticos de f em todo o $\mathbb{R}^2$;

(b) Determine os pontos de máximo e mínimo de f sobre a circunferência: $(x-3)^2 + y^2 = 9$;

(c) Determine os valores máximo e mínimo de f no disco $D = \{(x,y);\ (x-3)^2 + y^2 \leq 9\}$ e os pontos onde estes valores ocorrem.

Solução: (a)

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Assim, obtemos 2 pontos críticos: $P_1 = (3,0)$ e $P_2 = (-3,0)$.

Calculando as segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Aplicando o teste da segunda derivada para classificar os pontos críticos:

	$B^2 - AC$	A	
$P_1 = (3,0)$	$0 - 6 \cdot 2 < 0$	$4 > 0$	mínimo local
$P_2 = (-3,0)$	$0 - (-6) \cdot 2 > 0$		ponto de sela

(b) Para determinar os pontos de máximo e mínimo de f sobre a circunferência: $(x-3)^2+y^2 = 9$, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Resolvendo o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - 9 & = & \lambda\, 2(x-3) \\ 2y & = & \lambda\, 2y \\ (x-3)^2 + y^2 - 9 & = & 0 \end{array}\right.$$

Da segunda equação, tem-se que $y(1-\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $\lambda = 1$.

Se $y = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 9 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 6$. Assim, obtemos os pontos $P_3 = (0,0)$ e $P_4 = (6,0)$.

Se $\lambda = 1$, substituindo na primeira equação, obtém-se $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$.

Se $x = 3$, substituindo-se na terceira equação tem-se $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$. Logo, temos os pontos $P_5 = (3,3)$ e $P_6 = (3,-3)$.

Se $x = -1$, substituindo-se na terceira equação tem-se $y^2+7 = 0$, o que é impossível.

Calculando os valores de f nos pontos encontrados, obtém-se:

$$f(P_3) = 0 \quad f(P_4) = 18 \quad f(P_5) = f(P_6) = -9$$

Logo, os pontos P_5 e P_6 são pontos de mínimo e P_4 é de máximo sobre a circunferência.

(c) Os pontos de máximo e mínimo de f sobre o disco D se encontram dentre os pontos críticos de f que estão no interior de D e os pontos de máximo e mínimo da fronteira de D.

O ponto P_2 não está no conjunto D, assim verificamos os valores de f apenas sobre os pontos P_1, P_3, P_4 P_5 e P_6.

Como $f(P_1) = -18$ e pelos valores já encontrados em (b) tem-se que :

- P_1 é de mínimo e P_4 é de máximo.