UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
**PRIMEIRA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO II**
Politécnica, Engenharia Química e Ciência da Computação 21/05/2013.

# GABARITO DAS QUESTÕES DISCURSIVAS

**1ª Questão.** (*2.2 pontos*).

Resolva o problema de valor inicial

$$xy' + 2y = \cos(x^2), \qquad y(\sqrt{\pi}) = 2,$$

no intervalo $x > 0$.

- **Solução.**

Primeiro, divida a equação diferencial por $x$ para obter a equação linear

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{\cos(x^2)}{x}.$$

Este problema pode ser resolvido usando o fator integrante

$$I(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{2\ln x} = x^2,$$

no intervalo $x > 0$. Em seguida, multiplique a equação diferencial por $I(x)$. Assim,

$$x^2y' + 2xy = x\cos(x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad (x^2y)' = x\cos(x^2).$$

Integrando, obtemos que

$$x^2y = \int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} + \frac{C}{x^2}.$$

Como $y(\sqrt{\pi}) = 2$,

$$y(\sqrt{\pi}) = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{2\pi} + \frac{C}{\pi} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2\pi.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} + \frac{2\pi}{x^2}.$$

**2ª Questão.** (*2.2 pontos*).

Considere a superfície $S$ definida por

$$z = x^2 + y^2 - 3.$$

**a**) Faça um desenho da superfície, destacando as curvas de interseção com os planos

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{e} \qquad z = 0.$$

**b**) Encontre uma parametrização da curva $C$ obtida como interseção de $S$ com o plano

$$2y + z = 0.$$

- **Solução.**

**a**) Os traços do parabolóide com equação $z = x^2 + y^2 - 3$ são as parábolas:

$$z = x^2 - 3, \qquad \text{no plano } xz \ (y = 0)(curvaverde).$$

$$z = y^2 - 3, \qquad \text{no plano } yz \ (x = 0)(curvavermelha),$$

e o círculo

$$x^2 + y^2 = 3, \qquad \text{no plano } xy \ (z = 0)(curvaazul).$$

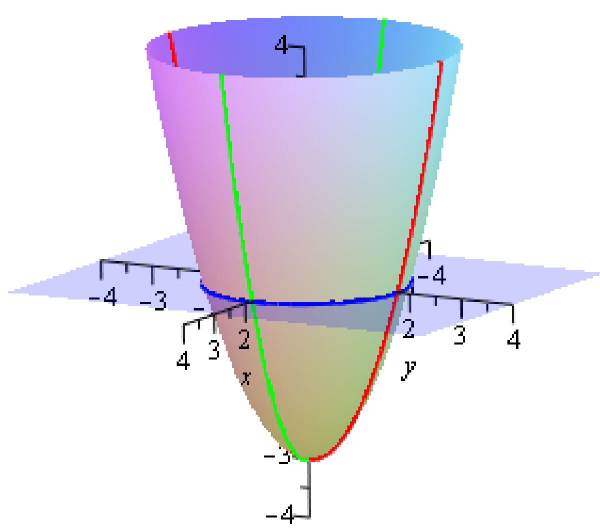


Figura 1: Paraboloide: $z = x^2 + y^2 - 3$

**b**) Os pontos que pertencem a curva $C$ satisfazem as equações

$$z = x^2 + y^2 - 3 \qquad \text{e} \qquad 2y + z = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 3 &= z \\ x^2 + y^2 - 3 &= -2y \\ x^2 + (y+1)^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a curva $C$ também pertencem ao cilindro circular reto

$$x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Assim, podemos escrever

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\ \text{sen}\, t - 1, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da equação do plano, temos que

$$z = -2y = -2(2\ \text{sen}\, t - 1) = 2 - 4\ \text{sen}\, t.$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para $C$, como

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\ \text{sen}\, t - 1, \qquad z = 2 - 4\ \text{sen}\, t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A equação vetorial correspondente é

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + (2\ \text{sen}\, t - 1)\,\vec{j} + (2 - 4\ \text{sen}\, t)\,\vec{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$