Questão 1: (1.5 ponto)
Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Solução:
Como f é quociente de polinômios, segue que f é contínua em $\mathbb{R}^2 - (0,0)$.
Para verificarmos a continuidade em $(0,0)$, note que $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ e
$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{2y^4}{2y^4} = 1$.
Logo, f não é contínua em $(0,0)$.

Questão 2: (3.0 pontos)
A temperatura em cada ponto da região $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ é dada por $T(x,y,z) = xz + yz$. Determine a menor e a maior temperatura em D. Identifique também os pontos onde ocorrem tais temperaturas extremas.

Solução:
$\nabla T(x,y,z) = (z, z, x+y)$. Logo, os pontos críticos de T no interior de D são todos os pontos da forma $(x,-x,0)$ com $|x| < 1$. Nesses pontos $T = 0$.
Na fronteira, utilizaremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange, isto é, resolveremos o sistema:

$$\begin{aligned} z &= 2\lambda x & (1) \\ z &= 2\lambda y & (2) \\ x+y &= 2\lambda z & (3) \\ x^2+y^2+z^2 &= 1. & (4) \end{aligned}$$

Por (1) e (2), temos que $z = \lambda(x+y)$. Substituindo em (3), obtemos $z(2\lambda^2 - 1) = 0 \Longrightarrow z = 0$ ou $\lambda = \pm\sqrt{2}/2$.
Se $z = 0$, segue que (de (4)) $x^2 + y^2 = 1$, (de (1) e (2)) $\lambda = 0$ e (de (3)) $y = -x$, o que nos dá os pontos $(\pm\sqrt{2}/2, \mp\sqrt{2}/2, 0)$. Nesses pontos, $T = 0$.
Se $\lambda = \sqrt{2}/2$, segue de (1), (2) e (4), que $z = \pm\sqrt{2}/2$, $z = \sqrt{2}x = \sqrt{2}y$ e, consequentemente, obtemos os pontos $(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-1/2, -1/2, -\sqrt{2}/2)$. Nesses pontos, $T = \sqrt{2}/2$.
Se $\lambda = -\sqrt{2}/2$, segue de (1), (2) e (4), que $z = \pm\sqrt{2}/2$, $z = -\sqrt{2}x = -\sqrt{2}y$ e, consequentemente, obtemos os pontos $(1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$. Nesses pontos, $T = -\sqrt{2}/2$
Assim, os pontos de máximo de f em D são $(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$ e $(-1/2, -1/2, -\sqrt{2}/2)$, enquanto que os pontos de mínimo são $(1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2)$ e $(-1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$.

Questões de Múltipla Escolha

Questão 3: (0.5 ponto)
Seja $f(x,y)$ uma função e (a,b) um ponto no domínio de f. Considere as afirmativas:

I. Se $f_x(a,b)$ existe, então necessariamente existe $f_y(a,b)$;
II. Se $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ existem, então necessariamente f será diferenciável em P_0;
III. Se o gráfico de f admite um plano tangente em $(a,b,f(a,b))$, então existirá $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b)$ para qualquer vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$;
IV. Em geral, se $f_{xy}(a,b)$ e $f_{yx}(a,b)$ existem, então $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$;
V. Se $f(x,y)$ é um polinômio, então $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução:
Afirmativas verdadeiras: III e V.
Afirmativas falsas: I, II e IV.

Nas **Questões 4 a 8**, considere a função

$$g(x,y) = 2(x-2)^2y + y^2 + 1.$$

Questão 4: (0.5 ponto)
A soma das coordenadas do vetor $\nabla g(1,1)$ é

Solução:
$\nabla g(x,y) = (4(x-2), 2(x-2)^2 + 2y) \Longrightarrow \nabla g(1,1) = (-4,4)$. Logo, $g_x(1,1) + g_y(1,1) = 0$.

Questão 5: (0.5 ponto)
Se $\mathbf{u} = (4,3)$, a derivada direcional $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(1,1)$ é

Solução:
$\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(1,1) = \nabla g(1,1) \bullet (4/5, 3/5) = -4/5$.

Questão 6: (0.5 ponto)
A taxa de variação mínima de g a partir de (2,2) é

Solução:
$\nabla g(2,2) = (0,4)$. Logo, a taxa de mínima de g a partir de (2,2) é $-\|\nabla g(2,2)\| = -4$.

Questão 7: (0.5 ponto)
Considere a função vetorial $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, tal que $\sigma(1) = (1, 1)$ e $\sigma'(1) = (3, 2)$. Se $F(t) = g(\sigma(t))$, então $F'(1)$ é

Solução:
$F'(1) = g_x(1,1)x'(1) + g_y(1,1)y'(1) = -4\cdot3 + 4\cdot2 = -4$.

Questão 8: (0.5 ponto)
Seja $u(t) = t^2 + t$. Se $H(x, y) = u(g(x, y))$, então $\frac{\partial H}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial H}{\partial y}(1,1)$ vale

Solução:
$g(1,1) = 4$. $u'(t) = 2t + 1 \Longrightarrow u'(4) = 9$.
$H_x(1,1) = u'(g(1,1))\, g_x(1,1) = -36$ e
$H_y(1,1) = u'(g(1,1))\, g_y(1,1) = 36$.
Logo, $H_x(1,1) - H_y(1,1) = -72$.

Questão 9: (0.5 ponto)
Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Se a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, -1, 1)$ é $2z - x + y = 0$, então

Solução:
Como $z = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$, segue que

$f_x(1, -1) = 1/2$ e $f_y(1, -1) = -1/2$.

Questão 10: (0.5 ponto)
Considere a curva $\mathcal{C}$ dada pela interseção das superfícies $2z - x + y = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Um vetor tangente a $\mathcal{C}$ em $(1, -1, 1)$ é:

Solução:
Sejam $f(x, y, z) = 2z - x + y$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Logo,
$\nabla f(x, y, z) = (-1, 1, 2) \Longrightarrow \nabla f(1, -1, 1) = (-1, 1, 2)$,
e
$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \Longrightarrow \nabla g(1, -1, 1) = (2, -2, 2)$.
Um vetor tangente a $\mathcal{C}$ em $(1, -1, 1)$ é
$\nabla f(1, -1, 1) \times \nabla g(1, -1, 1) = (6, 6, 0)$

Questão 11: (0.5 ponto)
A lei dos gases para uma massa fixa m de um gas ideal é $PV = mRT$, onde T é a temperatura absoluta, P a pressão, V o volume e R uma constante específica do gás. Assumindo que m, R, P, V, $T > 0$, quanto vale o produto $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}$?

Solução:
$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-mRT}{V^2}$, $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{mR}{P}$, e $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{mR}$.
Logo, $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{mRT}{PV} = -1$.

GABARITO DAS QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA

Questão	MODELO A	MODELO B
3	C	A
4	B	B
5	E	E
6	A	D
7	A	B
8	B	C
9	C	E
10	E	A
11	D	D