Questão 1: (2.5 pontos)

Considere a curva C parametrizada por $\alpha(t) = (t, -t^2 + 3, \frac{2t^3}{3})$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) (0.5 ponto) Dê a equação da reta tangente à curva C no ponto $(1, 2, 2/3)$;

Solução:
$\alpha'(t) = (1, -2t, 2t^2)$. Logo,
$\alpha(1) = (1, 2, 2/3)$ e $\alpha'(1) = (1, -2, 2)$.
Assim, a equação paramétrica da reta tangente é
$r(s) = \alpha(1) + s\alpha'(1) = (1 + s, 2 - 2s, \frac{2}{3} + 2s),\ s \in \mathbb{R}$

(b) (0.5 ponto) Dê a equação do plano normal à curva C no ponto $(1, 2, 2/3)$;

Solução:
O vetor normal ao plano é $\mathbf{n} = \alpha'(1)$. Assim, a equação do plano normal á curva C no ponto $(1, 2, 2/3)$ é
$(1, -2, 2) \bullet (x - 1, y - 2, z - \frac{2}{3}) = 0$, isto é,
$x - 2y + 2z + \frac{5}{3} = 0$.

(c) (1.0 ponto) Calcule o comprimento do arco da curva C quando t varia de 0 a 1;

Solução:
$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(1 + 2t^2)^2} = 1 + 2t^2$. Assim,
$L = \displaystyle\int_0^1 1 + 2t^2\, dt = \left[t + \frac{2t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{5}{3}$.

(d) (0.5 ponto) Dê a equação do plano que contém os pontos $\alpha(0)$, $\alpha(-1)$ e $\alpha(1)$.

Solução:
$\alpha(0) = (0, 3, 0)$, $\alpha(-1) = (-1, 2, -2/3)$ e $\alpha(1) = (1, 2, 2/3)$.
Sejam $\mathbf{u} = \alpha(-1) - \alpha(0) = (-1, -1, -2/3)$ e $\mathbf{v} = \alpha(1) - \alpha(0) = (1, -1, 2/3)$.
O vetor normal ao plano é $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-\frac{4}{3}, 0, 2)$.
Assim, a equação do plano com vetor normal $\mathbf{n}$ contendo $\alpha(0)$ é
$(-4/3, 0, 2) \bullet (x, y - 3, z) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{4}{3}x + 2z = 0$.

Questão 2: (3.0 pontos)
Solucione o problema de valores iniciais:

$$y''(t) + 25y(t) = 20\sin 5t$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Solução:

Equação homogênea associada: $y''(t) + 25y(t) = 0$.
Equação característica: $r + 25 = 0 \ \Rightarrow \ r = \pm 5i$.
Solução da equação homogênea associada:

$$y_h(t) = C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t).$$

Solução particular da equação não homogênea $[y''(t) + 25y(t) = 20\sin 5t]$:
$y_p(y) = At\sin(5t) + Bt\cos(5t)$.
$y_p'(t) = (A - 5Bt)\sin(5t) + (B + 5At)\cos(5t)$.
$y_p''(t) = (-10B - 25At)\sin(5t) + (10A - 25Bt)\cos(5t)$.
Assim, $y_p'' + 25y_p = -10B\sin(5t) + 10A\cos(5t) = 20\sin(5t)$. Logo, $A = 0$ e $B = -2$ e

$$y_p(t) = -2t\cos(5t).$$

Solução geral da equação não homogênea: $y(t) = C_1\sin(5t) + (C_2 - 2t)\cos(5t)$.
$y'(t) = (-5C_2 + 10t)\sin(5t) + (5C_1 - 2)\cos(5t)$.
Usando os dados inicias, obtemos:
$y(0) = C_2 = 1$ e $y'(0) = 5C_1 - 2 = 3 \ \Rightarrow \ C_1 = 1$.
Assim, a solução do problema de valores iniciais é

$$y(t) = \sin(5t) + (1 - 2t)\cos(5t).$$

Questão 3: (2.5 pontos)
A posição de um objeto em cada instante $t \geq 0$ é dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, sendo que sua velocidade vetorial satisfaz

$$\alpha'(t) = \left(\frac{6t - 3tx}{t^2 + 1}, 2t\sqrt{y - 1} \right),\ t \geq 0.$$

Supondo que $\alpha(0) = (3, 1)$, qual é a posição do objeto no instante $t = 1$?

Solução:
As coordenadas da curva satisfazem as equações diferenciais

$$x' + \frac{3t}{t^2 + 1}x = \frac{6t}{t^2 + 1}$$

e

$$y' = 2t\sqrt{y - 1}.$$

A primeira equação é linear e seu fator integrante é dado por $\mu(t) = \exp\left(\int \frac{3t}{t^2+1}\, dt \right) = (t^2+1)^{3/2}$. Consequentemente, temos

$$\left[(t^2 + 1)^{3/2} x\right]' = 6t(t^2 + 1)^{1/2}.$$

Integrando ambos os lados,

$$(t^2 + 1)^{3/2} x = 2(t^2 + 1)^{3/2} + C.$$

Portanto a solução geral é

$$x(t) = 2 + C(t^2 + 1)^{-3/2}.$$

Para satisfazer a condião inicial $x(0) = 3$ tomamos $C = 1$.

A segunda equação é separável. Ela tem duas soluções. Uma constante $y(t) = 1$ para todo t (que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$) e a outra é não constante, obtida integrando-se

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y - 1}} = \int 2t\, dt \ \Rightarrow\ \sqrt{y - 1} = \frac{t^2}{2} + K.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1$, obtemos $K = 0$ e

$$y(t) = 1 + \frac{t^4}{4}.$$

Segue daí, que os possíveis vetores posição são:

$$\alpha(t) = (2 + (t^2 + 1)^{-3/2}, 1) \ \Rightarrow\ \alpha(1) = (2 + 2^{-3/2}, 1).$$

ou

$$\alpha(t) = (2 + (t^2 + 1)^{-3/2}, 1 + \frac{t^4}{4}) \ \Rightarrow\ \alpha(1) = (2 + 2^{-3/2}, 5/4).$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 7 - x^2 - y^2\} \text{ e } S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 - 1\}.$$

(a) (1.0 ponto) Parametrize a curva C dada pela interseção das duas superfícies S_1 e S_2.

Solução:

Eliminado z nas equaçãoes de S_1 e S_2, obtemos $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ (elípse). Logo, a parametrização da curva C é

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\sqrt{2}\sin t, \underbrace{4\cos^2 t - 1}_{1+2\cos(2t)}),\ t \in [0, 2\pi].$$

(b) (1.0 ponto) Encontre a equação paramétrica da reta tangente a C no ponto $P_0 = (\sqrt{2}, 2, 1)$.

Solução:

$$\sigma'(t) = (-2\sin t, 2\sqrt{2}\cos t, \underbrace{-8\sin t\cos t}_{-4\sin(2t)}),\ t \in [0, 2\pi].$$

Para $t = \pi/4$, $\sigma(\pi/4) = (\sqrt{2}, 2, 1) = P_0$ e $\sigma'(\pi/4) = (-\sqrt{2}, 2, -4)$. Assim, a equação da reta tangente a C no ponto P_0 é

$$r(s) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}s, 2 + 2s, 1 - 4s),\ s \in \mathbb{R}.$$