Prova final Cálculo2 do 29 de Novembro 2011

1.

2.

3.

4. (a) Determinar o integral geral da seguinte equação diferencial ordinaria

$$u'' - 3u' + 2u = sin(x) + c, \tag{1}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(b) Usar esse resultado para determinar todas as funções u de classe C^2 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2u(x,y) & = & sin(x) + y, \\ u(0,y) = e^y, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y. \end{cases} \tag{2}$$

Gabarito

Questão 1

a. $\alpha(1) = (1,1,-1) \in S$, $\alpha'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, -\frac{1}{4})$, $\alpha'(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. Pondo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 3$, uma equação do plano tangente a S em $\alpha(1)$ é

$$F_x(1,1,-1)(x-1) + F_y(1,1,-1)(y-1) + F_z(1,1,-1)(z+1) = 0.$$

Vale $F_x(x,y,z) = 2x$, $F_y(x,y,z) = 2y$, $F_z(x,y,z) = -1$, logo $F_x(1,1,-1) = 2$, $F_y(1,1,-1) = 2$, $F_x(1,1,-1) = -1$. Então

$$\nabla F(1,1,-1) = (2,2,-1).$$

Logo

$$\frac{1}{4}\nabla F(1,1,-1) = \frac{1}{4}(2,2,-1) = \alpha'(1).$$

O que significa que o vetor tangente à curva em $\alpha(1)$ é ortogonal ao plano tangente à superficie S no ponto $\alpha(1)$.

b. $\alpha(1) = (1,1,1) \in S$, $\alpha'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2)$, $\alpha'(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$. Pondo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 1$, obtemos

$$\nabla F(1,1,-1) = (2,2,-1).$$

Logo

$$< \alpha'(1), \nabla F(1,1,-1) >= 0.$$

O vetor tangente à curva em $\alpha(1)$ é tangente também ao plano tangente à superficie S no mesmo ponto $\alpha(1)$.

Questão 2

Metodo 1.

Sabendo que $z^2 = 4-2x^2$ e $x = y$. O problema é equivalente a encontrar os extremos da função $g(x) = 4 - x^2$ no intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, que tem um ponto de máximo em $x = 0$ e pontos de mínimo em $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Logo o máximo é igual a $f(0,0,2) = f(0,0,-2) = 4$ se encontra em $(0,0,2)$ e $(0,0,-2)$ e o mínimo igual a $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 2$, se encontra em $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

Metodo 2. (Multiplicadores de Lagrange)

A Lagragiana do problema é

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + z^2 - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 4) - \lambda_2(y - x).$$

$$\begin{cases} L_x = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \\ L_y = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0, \\ L_z = 2z - 2\lambda_1 z = 0, \\ L_{\lambda_1 = -(x^2+y^2+z^2-4)=0}, \\ L_{\lambda_2 = -(y-x)=0}. \end{cases} \tag{3}$$

Analisando o sistema (3) temos que discutir dois casos.

Caso 1. $\lambda_1 = 1$.

As soluções do sistema (3) são $(0,0,2)$ e $(0,0,-2)$. Substituindo em f obtemos $f(0,0,2) = f(0,0,-2) = 4$.

Caso 2. $\lambda_1 \neq 1$.

As soluções do sistema (3) são $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$. Substituindo em f obtemos $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 2$.

Então os pontos $(0,0,2)$, $(0,0,-2)$ são pontos de máximo absoluto e os pontos $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, são pontos de mínimo absoluto.

Questão 3

(i): Seja $x(s,t) = s + 2t + 1$, $y(s,t) = t^2 - s - 2$. Pela regra da cadeia

$$\nabla G(0,0) = (f_x(1,-2)x_s + f_y(1,-2)y_s, f_x(1,-2)x_t + f_y(1,-2)y_t),$$

$$\nabla G(0,0) = (f_x(1,-2) - f_y(1,-2), f_x(1,-2)) = (1,0).$$

Logo $\nabla f(1,-2) = (0,-1)$.

(ii): Seja $u = (u_1, u_2)$, teremos que $D_u f(1,-2) =< u, \nabla f(1,-2) >= -u_2$ e $|u| = 1$. Então $D_u f(1,-2) = 1$ se e só se $u_2 = -1$, e $u_1 = 0$, i.e., $u = (0,-1)$.

Questão 4

1. A equação homogênea asociada à equação diferencial (1) é
$$u'' - 3u' + 2u = 0. \tag{4}$$
A eq. car. de (4) é
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2\lambda = 0 \tag{5}$$
As raízes de (5) são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Então o integral geral da (4) é
$$u_h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}, \tag{6}$$
onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Agora procuramos uma solução particular $u_p(x) = \phi(x) + \tilde{\phi}(x)$ da (1), onde $\tilde{\phi}(x) = k \in \mathbb{R}$ e ϕ satisfazem
$$\tilde{\phi}'' - 3\tilde{\phi}' + 2\tilde{\phi} = c, \tag{7}$$
$$\phi'' - 3\phi' + 2\phi = sin(x), \tag{8}$$
Obtemos então $2k = c$, logo $\tilde{\phi}(x) = \frac{c}{2}$. $\phi(x) = acos(x) + bsin(x)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes a determinar. Substituindo em (8) obtemos. $\phi'(x) = -asin(x) + bcos(x)$, $\phi''(x) = -acos(x) - bsin(x)$, $(a - 3b)cos(x) + (3a + b)sin(x) = sin(x)$ se e só se $a - 3b = 0$ e $3a + b = 1$. Resolvendo o sistema correspondente temos $a = \frac{3}{10}$ e $b = \frac{1}{10}$. Logo $\phi(x) = \frac{1}{10}(3cos(x) + sin(x))$, o que implica que $u_p(x) = \frac{1}{10}(3cos(x) + sin(x)) + \frac{c}{2}$ e $u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{10}(3cos(x) + sin(x)) + \frac{c}{2}$.

2. Considerando a função $u(., y) : x \mapsto u(x, y)$ obtemos, usando o ponto precedente, que deve ser
$$u(x, y) = c_1(y)e^x + c_2(y)e^{2x} + \frac{1}{10}(3cos(x) + sin(x)) + \frac{y}{2}, \tag{9}$$
onde $c_1(y)$ e $c_2(y)$, agora, são funções de y, que satisfazem
$$u(0, y) = c_1(y) + c_2(y) + \frac{3}{10} + \frac{y}{2} = e^y,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = c_1(x) + 2c_2(x) + \frac{1}{10} = y.$$
Resolvendo o sistema asociado obtemos
$$c_1(y) = 2e^y - 2y - \frac{1}{2},$$
$$c_2(y) = -e^y + \frac{3}{2}y + \frac{1}{5}.$$
Logo, o integral geral de (2) é
$$u(x, y) = \left(2e^y - 2y - \frac{1}{2}\right)e^x + \left(-e^y + \frac{3}{2}y + \frac{1}{5}\right)e^{2x} + \frac{1}{10}(3cos(x) + sin(x)) + \frac{y}{2}.$$