1^a **Questão (2,5 pontos):**

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

i. Se o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, -1, 2)$ é dado por

$$x - y + 2z = 6,$$

encontre $\nabla f(1, -1)$.

ii. Sejam

$$x = x(s, t) = e^s + te^t, \quad y = y(s, t) = s + t - 1, \quad G(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)).$$

Usando o item i, calcule $\nabla G(0, 0)$.

iii. Determine a direção na qual a taxa de variação de f no ponto $(1, -1)$ é a maior possível. Determine esta taxa de variação.

Resolução:

i. Escrevendo o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, -1, 2)$ na forma

$$z - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y + 1),$$

obtemos $\nabla f(1, -1) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

ii. Como

$$x = x(s, t) = e^s + te^t, \quad y = y(s, t) = s + t - 1, \quad f(x, y)$$

são funções diferenciáveis,

$$G(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

é diferenciável. Usando a regra da cadeia obtemos;

$$\begin{cases} G_s(s, t) = f_x(x, y)x_s(s, t) + f_y(x, y)y_s(s, t), \\ G_s(s, t) = f_x(x, y)x_s(s, t) + f_y(x, y)y_s(s, t), \end{cases}$$

Do item i, obtemos

$$\begin{cases} f_x(1, -1) = -\dfrac{1}{2}, \\ f_y(1, -1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Por outro lado, $x_s(0, 0) = y_s(0, 0) = x_t(0, 0) = y_t(0, 0) = 1$, isto nos dá $\nabla G(0, 0) = (0, 0)$

iii. A maior taxa de variação de f no ponto $(1,-1)$ é dada na direção do vetor gradiende de f, isto é $\nabla f(1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Esta taxa de variação é $|\nabla f(1,-1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2^a **Questão (2,5 pontos):**

Determine os pontos em que a função abaixo é contínua:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) y^4 x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, & se \quad (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & se \quad (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Resolução: Se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ a função $f(x,y,z)$ é a composição de funções contínuas e portanto é ela continua.

No caso $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ usaremos o teorema do confronto, para isto observe que:

$$0 \leq f(x,y,z) = \sin^2\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} y^2 \leq y^2$$

A ultima desigualdade provém do fato que $y^2 \leq x^2+y^2+z^2$ e $x^2 \leq x^2+y^2+z^2$. Logo tamando o limite obtemos:

$$\lim_{(x,y,z) \longrightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0 = f(0,0,0)$$

Portanto a função é contínua.

3^a **Questão (2,5 pontos):**

Mostre que o valor máximo de $a^2b^2c^2$ sobre uma esfera de raio r centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas (a,b,c) é $(r^2/3)^3$. Usando este fato, prove que, para números não negativos a, b e c,

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Resolução: Queremos maximizar a função $f(a,b,c) = a^2b^2c^2$ sujeito à condição $g(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-r^2 = 0$. Veja que f e g são funções de classe C^∞. Além disso, $\nabla g(a,b,c) \neq (0,0,0)$ para os pontos (a,b,c) tais que $g(a,b,c) = 0$. Portanto, existe um número λ tal que, nos pontos onde $g(a,b,c) = 0$ e f assume um extremo, tem-se:

$$\nabla f(a,b,c) + \lambda \nabla g(a,b,c) = (0,0,0)$$

com $g(a,b,c) = 0$.

Isto é:

$$\begin{cases} ab^2c^2 + \lambda a = 0, \\ a^2bc^2 + \lambda b = 0, \\ a^2b^2c + \lambda c = 0, \\ a^2+b^2+c^2 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando as trÊs primeiras equações por a, b e c respectivámente, obtemos:

$$3x^2y^2z^2 + \lambda r^2 = 0$$

. Substituindo este valor de lambda nas primeiras três equações e observando que se ou $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$, f assumiria um valor minimo, obteremos que

$$a = b = c = \pm\frac{r}{\sqrt{3}}$$

e o máximo de f é então: $f\left(\pm\frac{r}{\sqrt{3}}, \pm\frac{r}{\sqrt{3}}, \pm\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{r^2}{3}\right)^3$

Logo para $f(a,b,c) \leq \left(\frac{r^2}{3}\right)^3$ para os pontos (a,b,c) tais que $a^2+b^2+c^2 = r^2$, isto mostra que:

$$a^2b^2c^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3$$

Concluimos então que para número não negativos, obtemos:

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

4^a **Questão (2,5 pontos):**

Estude os pontos críticos da função

$$f(x,y) = (x^2-3)e^{-(x^2+y^2)},$$

detalhando, se possível, quais são os pontos de máximo local, mínimo local e de sela.

Resolução: Vamos primeiro encontrar os pontos críticos de f. Calculando o gradiente da função $f(x,y) = (x^2-3)e^{-(x^2+y^2)}$ obtemos:

$$\nabla f(x,y) = (\, 2x(4-x^2), -2y(x^2-3)\,)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Igualando a primeira coordenada a zero, obtemos que $x = 0, \pm 2$. De maneira similar, igualando a segunda coordenada a zero, obtemos $x = \pm\sqrt{3}$ ou $y = 0$. Mas como $x = \pm\sqrt{3}$ não zera a primeira coordenada, os únicos pontos críticos de f são $(0,0), (2,0)$ e $(-2,0)$.

Para classificar os pontos críticos vamos usar o teste da derivada segunda. Precisamos calcular

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

nos pontos críticos. Usando que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(2x^4 - 11x^2 + 4)e^{-(x^2+y^2)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2(x^2-3)(2y^2-1)e^{-(x^2+y^2)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy(x^2-4)e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

temos $H(0,0) = 48$, $H(2,0) = H(-2,0) = 32e^{-8}$. Finalmente, como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) = -16e^{-4} < 0$, podemos afirmar que $(0,0)$ é um ponto de mínimo local e $(\pm 2, 0)$ são pontos de máximo local.