**Questão 1.** Solucione explicitamente a equação diferencial de primeira ordem

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x.$$

**Resolução.** Podemos encontrar a solução geral da equação de duas maneiras: usando fator integrante (já que a equação é linear) ou integrando como uma equação separável.

(i) Dividindo a equação por $(x^2+1) \neq 0$, obtemos a equação equivalente

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}\,y = \frac{6x}{x^2+1}. \tag{1}$$

O fator integrante será

$$\mu = e^{\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx} = e^{\frac{3}{2}ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Multiplicando a equação (1) por $\mu$, obtemos

$$\frac{d}{dx}((x^2+1)^{\frac{3}{2}}y) = 6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Após a integração, teremos $y = 2 + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$ como solução geral da equação diferencial.

(ii) Observe que a equação é equivalente à

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 3x(2-y).$$

Daí segue que $y = 2$ é uma solução. Vamos buscar as outras soluções; por unicidade, segue que para essas soluções $y - 2 \neq 0$. Portanto, podemos dividir por $2-y$ e obter

$$\frac{1}{2-y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{x^2+1}.$$

Logo,

$$\int \frac{1}{2-y}\,dy = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx \Leftrightarrow -ln(|2-y|) = ln[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}] + C_0.$$

Daí seguirá que $y = 2 \pm e^{-C_0}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

**Questão 2.** Encontre uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes cuja solução geral é

$$y(x) = x + A\exp(x)\cos x + B\exp(x)\sin x.$$

**Resolução.** Pela forma da solução, sabemos que a equação é não-homogênea e tem $y_p(x) = x$ como solução particular. A equação homogênea correspondente tem solução geral dada por

$$y_h = A\exp(x)\cos x + B\exp(x)\sin x.$$

Portanto, seu polinômio característico tem raízes complexas $1 - i$ e $1 + i$. Logo, ele é dado por

$$(r - (1 - i))(r - (1 + i)) = r^2 - (1 + i + 1 - i)r + (1 + i)(1 - i) = r^2 - 2r + 2,$$

e a equação homogênea é $y'' - 2y' + 2y = 0$ e a não-homogênea é $y'' - 2y' + 2y = G(x)$, para alguma função $G(x)$. Para encontrar a função $G(x)$, lembramos que $y_p(x) = x$ é solução particular e, portanto,

$$G(x) = y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) = -2 + 2x.$$

**Questão 3.** Encontre uma função vetorial $\rho(t) = (x(t), y(t))$ que satisfaz

$$\rho'(t) = \big(2x(t) - y(t) + e^t, x(t)\big), \quad \rho(0) = (1, 2).$$

**Resolução.** Como $\rho'(t) = (x'(t), y'(t))$, temos que

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Substituindo $x(t) = y'(t)$ na primeira equação, temos que $y(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

um P.V.I. com uma equação linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes. A equação homogêna correspondente tem polinômio característico dado por

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0.$$

Portanto, a solução geral é

$$y_h(t) = Ate^t + Be^t.$$

Para encontrar uma solução particular, tentamos $y_p(t) = Ct^2e^t$ (observe que tanto $e^t$ quanto $te^t$ são soluções da homogênea). Para encontrar a constante $C$, substitua $y_p$ na equação (2). Temos

$$e^t = Ce^t[(2 + 4t + t^2) - 2(2t + t^2) + t^2] = 2Ce^t \Longrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a solução geral da equação (2) é $y(t) = \frac{1}{2}t^2e^t + Ate^t + Be^t$. Logo, $x(t) = y'(t) = \frac{1}{2}t^2e^t + (A+1)te^t + (A+B)e^t$. O fato de que $x(0) = 1$ e $y(0) = 2$ implica em $A = -1$ e $B = 2$. Finalmente, temos que

$$\rho(t) = (\frac{1}{2}t^2e^t + e^t, \frac{1}{2}t^2e^t - te^t + 2e^t)$$

**Questão 4.** Considere a curva $C$ parametrizada por:

$$\sigma(t) = (3\cos(2t), 2t, 3\,\mathrm{sen}(2t)) \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Resolva os seguintes itens:

a. Calcule o comprimento de arco da curva $C$.

b. Dê uma parametrização para a reta que é tangente à curva $C$ no ponto $P_0 = (3, 2\pi, 0)$.

c. Encontre a equação cartesiana do plano perpendicular à curva $C$ no ponto $P_0 = (3, 2\pi, 0)$.

d. Suponha que $\sigma(t)$ é o vetor posição de uma partícula no instante $t$. Mostre que em qualquer instante $t$, o vetor aceleração $A(t)$ é perpendicular ao vetor velocidade $V(t)$.

**Resolução.**

a. Derivando, obtemos que

$$V(t) = \sigma'(t) = (-6\,\mathrm{sen}(2t), 2, 6\cos(2t)).$$

O comprimento de arco é calculado como:

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{36\,\mathrm{sen}^2(2t) + 4 + 36\cos^2(2t)}\,dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{40}\,dt = 8\pi\sqrt{10}$$

b. Observe que o ponto $P_0 = \sigma(\pi)$ e, portanto, o vetor tangente à curva no ponto $P_0$ é

$$\sigma'(\pi) = (0, 2, 6).$$

Nesse caso, a eq. paramétrica da reta tangente é $P_0 + t(0, 2, 6)$, isto é,

$$x = 3,\ y = 2\pi + 2t,\ z = 6t.$$

c. O plano perpendicular à curva no ponto $P_0$ tem equação dada por

$$0 = (x-3, y-2\pi, z-0) \cdot (0,2,6) = 2(y-2\pi) + 6z \Longleftrightarrow 2y + 6z = 4\pi.$$

d. O vetor aceleração no instante $t$ é dado por $A(t) = \sigma''(t) = (-12\cos(2t), 0, -12\,\mathrm{sen}(2t))$. Devemos mostrar que $A(t) \cdot V(t) = 0$ para todo instante . Por definição (relembre que $V(t)$ do item a.),

$$A(t) \cdot V(t) = (-12\cos(2t))(-6\,\mathrm{sen}(2t)) + 0 + (-12\,\mathrm{sen}(2t))(6\cos(2t)) = 0.$$