Gabarito da Prova Final de Cálculo II 28/06/2011

Questão 1. (2,5 pontos) Encontre a solução $y(x)$ do problema de valor inicial

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x, \quad y(0) = 1.$$

Prova: Podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x(2-y)}{x^2+1}$$

que é separável. (Como $y(t) = 2$ é solução da equação diferencial com condição inicial $y(0) = 2$, a nossa solução com condição inicial $y(0) = 1$ irá satisfazer $y(t) < 2$.) Então

$$\int \frac{1}{2-y}\,dy = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx, \quad -\log(2-y) = \frac{3}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Podemos determinar agora a constante C usando a condição inicial $y(0) = 1$. Botando $x = 0$ e $y = 1$ na equação anterior obtemos $C = 0$. Continuando a resolver a equação

$$2 - y = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}, \quad y = 2 - (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Nota: Também poderíamos ter usado o método do fator integrante para resolver a equação diferencial.

Questão 2. Dada a superfície $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad z = xy\}$, determine:

(a) (1,0 pontos) o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sobre S_1 de modo que o plano tangente a S_1 em P_0 seja perpendicular à reta $\sigma(t) = (4t+1, 6t-2, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Prova: Temos: $\sigma'(t) = (4, 6, 1) = T$.
A normal $N_1(P)$ a S_1 em qualquer ponto P é: $\bigtriangledown f(P)$, onde $f(x,y,z) = xy - z$. Portanto, $N_1(P) = (y, x, -1)$.
Plano tangente perpendicular a reta $\iff$ $N_1(P) = \lambda T$.
Dai segue que $P_0 = (-4, -6, 24)$.

(b) (0,5 pontos) a equação do plano tangente a S_1 em P_0.
Prova: A equação é:

$$(x+4, y+6, z-24) \cdot (4, 6, 1) = 0 \quad \iff \quad 4x + 6y + z = -28.$$

(c) (1,0 pontos) Seja $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2=1\}$. Dê a equação da reta tangente à curva $C = S_1 \cap S_2$ em $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/2)$.

Prova: Seja $g(x,y,z) = x^2+y^2$. A normal $N_2(P)$ a S_2 em P é dada por: $\bigtriangledown g(P) = (2x, 2y, 0)$. Portanto, $N_2(P_1) = (2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}, 0)$.
A normal $N_1(P_1)$ a S_1 é: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$.
A tangente a $C = S_1 \cap S_2$ em P_1 é dada por

$$N_1(P_1) \times N_2(P_1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1) \times (2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}, 0) = (2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 0).$$

Portanto, a equação da reta tangente é:

$$x = 1/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}t, \quad y = 1/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2}t, \quad z = 1/2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questão 3. Seja f uma função de 2 variáveis diferenciável. Suponha que f tem as seguintes derivadas direcionais:

$$D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})} f(4,2) = 1, \quad D_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})} f(4,2) = 2.$$

(a) (1,0 pontos) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(4,2)$.

Prova: As equações anteriores podem se escrever

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(4,2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(4,2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema (somando e subtraindo as equações) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,2) = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) (1,5 pontos) Considere a curva parametrizada por $r(t) = \left(t^2, t\sin\left(t\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $t \geq 0$. Calcule a derivada de $f(r(t))$ no instante $t = 2$.

Prova: Sejam $x = t^2$ e $y = t\sin\left(t\frac{\pi}{4}\right)$. Notamos que $t = 2 \Rightarrow (x,y) = (4,2)$. Pela regra da cadeia, nos respetivos pontos,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}2t - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(t\frac{\pi}{4}\right) + t\frac{\pi}{4}\cos\left(t\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{11}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Questão 4. Sejam $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x \geq 0\}$.

(a) (1,0 pontos) Determine e classifique os pontos críticos de f no interior de D.

Prova: $P = (x,y)$ é ponto critico $\iff \quad \bigtriangledown f(P) = 0$. Portanto, P é ponto critico

$$\iff \partial f/\partial x = 2x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \partial f/\partial y = 4y = 0.$$

Dai, $P_0 = (1/2, 0)$ é o único ponto critico de f no interior de D.
Como $A = \partial^2 f/\partial x^2(P_0) = 2 > 0$ e $(\partial^2 f/\partial x \partial y)^2 - A\partial^2 f/\partial y^2 = -8 < 0$, concluimos que P_0 é um ponto de minimo relativo.

Obs.2 O critério de correção foi:

Achou o ponto critico: equivale a $0,5$ pontos.

Classificou o ponto: equivale a $0,5$ pontos.

(b) (1,5 pontos) Determine os valores máximo e mínimo de f em D.

Prova: Observe que o dominio D é como na Figura 1. A fronteira de D é a união de C_1 e C_2, onde:

$$C_1 = \{(0,y)\,;-1 \leq y \leq 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x,y);\, x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x \geq 0\}.$$

Assim, se for resolver por Lagrange, tem que montar dois sistemas:

$$\begin{cases} \bigtriangledown f(x,y) = \lambda \bigtriangledown g(x,y) \\ g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \bigtriangledown f(x,y) = \lambda \bigtriangledown h(x,y) \\ h(x,y) = x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Resolvendo (1), chegamos ao extremo $P_1 = (1,0)$.
Resolvendo (2), chegamos aos pontos $P_2 = (0,1)$ e $P_3 = (0,-1)$.
Comparando: $f(P_0) = -1/4, \quad f(P_1) = 0, \quad \text{e} \quad f(P_2) = f(P_3) = 2$.
Assim: P_0 é ponto de minimo absoluto, P_2 e P_3 são pontos de máximos absolutos de f em D.

Obs.1 Poderia ser resolvido por substituição.

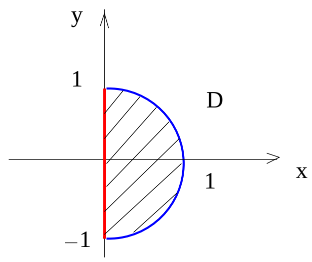

Figure 1: O dominio D.

Obs.2 O critério de correção foi:

montou e resolveu os dois sistemas equivale a $1,5$ pontos.

montou e resolveu certo um dos sistemas equivale a $0,8$ pontos.

montou e resolveu certo um dos sistemas e parte do outro equivale a $1,2$ pontos.