Gabarito da 2ª Prova Unificada de Cálculo II 16/06/2011

Questão 1. (2,5 pontos) Determine, justificando, os pontos de continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Prova: Para $(x,y) \neq (0,0)$ a função f é contínua pois é formada pelo quociente e composição de funções contínuas, nomeadamente, polinômios, raíz quadrada e cosseno. Vamos ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2} = 0 \tag{1}$$

e portanto, sendo o cosseno uma função contínua,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2}\right) = \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2}\right) = \cos(0) = 1 = f(0,0)$$

e portanto f também é contínua na origem. Para mostrar (1) notamos que

$$\frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

logo

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^6+x^4y^2}}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

e pelo teorema do confronto obtemos (1).

Questão 2. Seja S a superfície dada pela equação $F(x,y,z) = 0$ onde F é uma função diferenciável.

(a) (1,0 pontos) Assuma que a curva dada por $r(t) = (2t, t^2, \cos(\frac{\pi}{2}t))$, $t \in \mathbb{R}$, interseta perpendicularmente a superfície S no ponto $(2,1,0)$. Calcule o plano tangente a S no ponto $(2,1,0)$.

Prova: No ponto $(2,1,0)$, o vetor tangente à curva C é vetor normal da superfície S. Temos $r'(t) = (2, 2t, -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t))$. Como $r(t) = (2,1,0) \Leftrightarrow$

$t=1$, consideramos $r'(1) = (2, 2, -\frac{\pi}{2})$ e o plano tangente a S no ponto $(2, 1, 0)$ é dado por

$$2(x-2) + 2(y-1) - \frac{\pi}{2}z = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 2y - \frac{\pi}{2}z = 6.$$

(b) (1,5 pontos) Seja $f(x, y)$ a função dada implicitamente por

$$F(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = f(x, y).$$

Seja $g(u, v) = f(4uv, u^2 + v^2)$. Calcule $g_u(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $g_v(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Prova: Vamos usar a regra cadeia com $x = 4uv$ e $y = u^2 + v^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}4v + \frac{\partial f}{\partial y}2u.$$

Como $(u, v) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 1)$ fica $g_u(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_x(2, 1)2\sqrt{2} + f_y(2, 1)\sqrt{2}$. Para calcular as derivadas parciais $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$ podemos resolver em ordem a z a equação do plano tangente encontrado na alínea anterior:

$$z = \frac{4}{\pi}x + \frac{4}{\pi}y - \frac{12}{\pi}$$

e então $f_x(2, 1) = \frac{4}{\pi}$, $f_y(2, 1) = \frac{4}{\pi}$ resultando $g_u(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{12\sqrt{2}}{\pi}$. Do mesmo modo podemos calcular $g_v(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{12\sqrt{2}}{\pi}$.
Nota: Alternativamente, podemos obter as derivadas parciais de f a partir das fórmulas de derivação implícita $f_x = -F_x/F_z$, $f_y = -F_y/F_z$ e, como $\nabla F(2, 1, 0)$ é vetor normal a S, $\nabla F(2, 1, 0) = \lambda\, r'(1)$.

Questão 3. Considere a função $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (1,0 pontos) Calcule os pontos críticos de f.

Prova:

$$f_x = x(2 - x^2 + y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad f_y = y(-2 - x^2 + y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$f_x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } 2 - x^2 + y^2 = 0$$

Se $x = 0$ então:

$$f_y = 0 \;\Leftrightarrow\; y(y^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \text{ ou } y = \pm\sqrt{2}$$

Isto é, obtivemos as soluções $(0,0), (0, \pm\sqrt{2})$.

Se $2 - x^2 + y^2 = 0$ então:

$$f_y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \text{ ou } -2 - x^2 + y^2 = 0 \text{ (Impossível)} \;\;\Leftrightarrow\; y = 0$$

Então $x^2 = 2$ e obtemos as soluções $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

Portanto, existem 5 pontos críticos: $(0,0), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0)$.

(b) (1,5 pontos) Classifique os pontos críticos de f em pontos de máximo local, mínimo local ou selas.

Prova: Vamos usar (se possível) o teste da segunda derivada.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (2 - 5x^2 + y^2 + x^4 - x^2y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ f_{yy} &= (-2 - x^2 + 5y^2 - y^4 - x^2y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ f_{xy} &= (x^3y - xy^3)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Seja $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$.

- $D(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ logo $(0,0)$ é um ponto de sela.
- $D(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{vmatrix} > 0$ e $4e^{-1} > 0$ logo $(0, \pm\sqrt{2})$ são pontos de mínimo local.
- $D(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix} > 0$ e $-4e^{-1} < 0$ logo $(\pm\sqrt{2}, 0)$ são pontos de máximo local.

Questão 4. (2,5 pontos) Encontre, caso existam, os pontos de máximo e mínimo absolutos de $f(x,y,z) = 4x - y + 2z$, para (x,y,z) pertencentes à curva C que é dada pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 5$ e o plano $2x + 3y + 2z = 0$.

Prova: Note que C é uma curva fechada. Como f é uma função contínua e C é um conjunto limitado e fechado, f tem máximo e mínimo absolutos em C. Vamos aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange com 2 restrições. Sejam

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2, \quad h(x,y,z) = 2x + 3y + 2z.$$

Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda 2x + \mu 2 & (1) \\ -1 = \lambda 2y + \mu 3 & (2) \\ 2 = 0 + \mu 2 & (3) \\ x^2 + y^2 = 5 & (4) \\ 2x + 3y + 2z = 0 & (5) \end{cases}$$

De (3) tiramos que $\mu = 1$. De (1) e (2) tiramos que $x = 1/\lambda$ e $y = -2/\lambda$. Botando em (4) obtemos $1/\lambda^2 + 4/\lambda^2 = 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.
$\lambda = +1 : \ x = 1, y = -2$ e, de (5), $z = 2$.
$\lambda = -1 : \ x = -1, y = 2$ e, de (5), $z = -2$.
Como $f(1, -2, 2) = 10$ e $f(-1, 2, -2) = -10$, concluimos que $(1, -2, 2)$ é ponto de máximo absoluto e $(-1, 2, -2)$ é ponto de mínimo absoluto.