Gabarito: Primeira Prova Unificada de Cálculo II

Questão 1. Um corpo, saindo do ponto $x(0) = 2$, se move ao longo do eixo x com velocidade dada por

$$xt + t - 2x - 2, \quad \text{onde} \quad t \quad \text{é o tempo.}$$

1. [1.5] Determine **explicitamente** a posição $x(t)$ do corpo em cada instante t,
2. [0.5] Faça um esboço da curva $x(t)$.
3. [0.5] Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

Solução:

Item 1) Temos o problema com condição inicial

$$\frac{dx}{dt} = xt + t - 2x - 2 = (t-2)(x+1), \quad x(0) = 2$$

que possui a solução óbvia constante dada por $x(t) = -1$ que não satisfaz a condição inicial dada. Portanto, podemos dividir ambos os lados por $x + 1$ obtendo

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int (t-2)\, dt,$$

ou seja,

$$\ln|x+1| = \frac{1}{2}t^2 - 2t + C.$$

Como a solução para a condição inicial dada satisfaz $x(t) + 1 > 0$ para todo t (visto que $x(0) + 1 = 3 > 0$ e consequentemente $x(t) > -1$ para todo t, pois, caso contrário, teríamos $x(t) = -1$ para algum t e portanto $x(t) = -1$ para todo t) temos

$$\ln(x+1) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + C.$$

Tomando a exponencial em ambos os lados, concluimos que

$$x(t) = D\exp(\frac{1}{2}t^2 - 2t) - 1,$$

onde $D = e^C$. Substituindo $x = 2$ e $t = 0$ na equação chegamos à solução desejada

$$x(t) = 3\exp(\frac{1}{2}t^2 - 2t) - 1.$$

OBS 1: As justificativas da divisão por $x+1$ e que $\ln|x+1| = \ln(x+1)$ serão consideradas na avaliação.
OBS 2: A equação diferencial também é linear e pode ser solucionada utilizando o método do fator integrante. Por este método:

Temos:

$$x'(t) = xt + t - 2x - 2 \Longleftrightarrow x' + (2-t)x = t - 2$$

. A solução é por fator integrante:

$\mu(t) = e^{\int (2-t)dt} = e^{2t-t^2/2}$. Portanto,

$$x(t) = [e^{2t-t^2/2}]^{-1}\{\int (t-2).e^{2t-t^2/2}dt + C\} =$$

$$= [e^{2t-t^2/2}]^{-1}\{-e^{2t-t^2/2} + C\} = -1 + C \cdot e^{t^2/2-2t}.$$

Substituindo $x(0) = 2$ obtemos $C = 3$. Portanto,

$$x(t) = 3e^{2t-t^2/2} - 1.$$

Item 2) O grá fico de $x(t)$ possui um ponto de mínimo quando $t = 2$ que é o único ponto crítico de $x(t)$ (visto que $x'(t) = 3(t-2)\exp(\frac{1}{2}t^2 - 2t))$ que corresponde no gráfico ao ponto $(2, x(2)) = (2, 3e^{-2}-1)$, cruza o eixo vertical no ponto $(0, 2)$ e cresce para ∞ quando $t \to \pm\infty$.

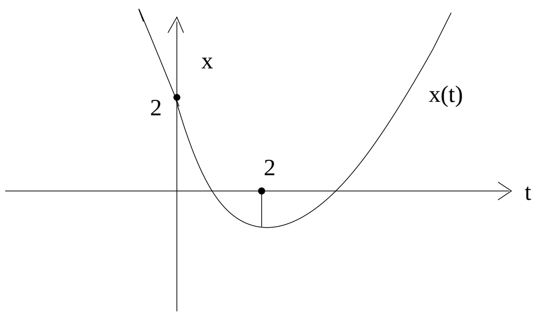

Figure 1: Gráfico de $x(t)$.

Item 3) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{2}t^2 - 2t = +\infty \Longrightarrow \lim_{t\to\pm\infty} 3\exp(\frac{1}{2}t^2 - 2t) - 1 = +\infty$.

Questão 2. (2,5 pt.) Resolva o problema de valores iniciais

$$y'' - 3y' + 2y = -10\cos 3x \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3$$

Solução:
1. O homogêneo associado: $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. polinômio característico: $p_c(x) = x^2 - 3x + 2$
3. Raízes de $p_c(x)$: $r_1 = 2, \qquad r_2 = 1$.
4. Solução geral do homogêneo : $y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.
5. $g(t) = -10\cos 3x$ não é solução do homogêneo
$\Longrightarrow y_p(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$ é um bom candidato.
6. Para o candidato acima:

$$\begin{cases} y_p(x) &=& A\cos 3x + B\sin 3x \\ y_p'(x) &=& -3A\sin 3x + 3B\cos 3x \\ y_p''(t) &=& -9A\cos 3x - 9B\sin 3x \end{cases}$$

7. Escrevendo $-10\cos 3x = y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x)$ temos

$$-10\cos 3x = (-7A - 9B)\cos 3x + (9A - 7B)\sin 3x \Longrightarrow A = \frac{7}{13} \text{ e } B = \frac{9}{13}$$

$$\Longrightarrow \qquad y_p(x) = \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\sin 3x.$$

8. Solução geral:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\sin 3x$$

cuja derivada é

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - \frac{21}{13}\sin 3x + \frac{27}{13}\cos 3x.$$

Substituindo $y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3$ obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = 6/13$. Portanto

$$y(x) = \frac{12}{13}e^{2x} - \frac{21}{13}\sin 3x + \frac{27}{13}\cos 3x.$$

Questão 3. Temos $c(t) = (2t+1, \sin t, \cos t)$ e $P_0 = ((\pi/2+1, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(a) (0,7 pt.) As equações paramétricas da reta $r(t)$ tangente a $c(t)$ em $P_0 = c(\pi/4)$: Solução: Temos: $c'(t) = (2, \cos t, -\sin t) \;\Rightarrow\; c'(\pi/4) = (2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = V_0$.

Como $r(t) = P_0 + tV_0 \quad \Rightarrow \quad$ obtemos

$$\begin{cases} x(t) &=& \pi/2 + 1 + 2t \\ y(t) &=& \sqrt{2}/2 + t\sqrt{2}/2 \\ z(t) &=& \sqrt{2}/2 - t\sqrt{2}/2, \quad t \in R. \end{cases}$$

(b) (0,8 pt.) Equação do plano normal: Solução:

O vetor normal é igual a $V_0 = (2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \Rightarrow$

$P = (x, y, z) \in Plano \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot V_0 = 0$

$\Rightarrow (x - (\pi/2 + 1), y - \sqrt{2}/2, z - \sqrt{2}/2) \cdot (2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \Rightarrow$

$2x + \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}/2z = \pi + 4.$

(c) (1,0 pt.) O comprimento ℓ:

Temos: $c'(t) = (2, \cos t, -\sin t) \Rightarrow |c'(t)|^2 = 5.$

Como $\ell = \int_0^{2\pi} |c'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} dt = 2\sqrt{5}\,\pi.$

Questão 4. Temos:

$$S_1 : -9x^2 - 9z^2 + 36y^2 = 36 \quad S_2 : -2x^2 + z^2 + 4y^2 = 4.$$

(a) S_1 : tem dois termos quadrados com sinal negativo e um termo quadrado com sinal positivo $\Rightarrow$ S_1 é um hiperboloide de duas folhas.

S_2 : tem dois termos quadrados com sinais positivo e um termo quadrado com sinal negativo $\Rightarrow$ S_1 é um hiperboloide de uma folha.

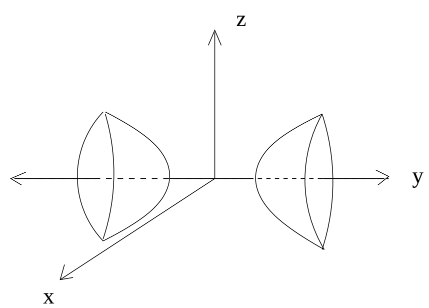

Figure 2: S_1: Hiperboloide de Duas Folhas.

(b) Os traços: veja abaixo.

(c) Como os coeficientes de dois dos termos quadrados na equação de S_1 são iguais concluimos que S_1 é de revolução. S_2 não é de revolução porque todos os coeficientes dos termos quadrados são dois a dois distintos.

Uma geratriz para S_1: Como podemos escrever

$$-9x^2 - 9z^2 + 36y^2 = 36 \iff x^2 + z^2 = 4(y^2 - 1) = (2 \cdot \sqrt{y^2 - 1}\,)^2$$

concluimos que $f(y) = 2 \cdot \sqrt{y^2 - 1}$ é uma geratriz de S_1.

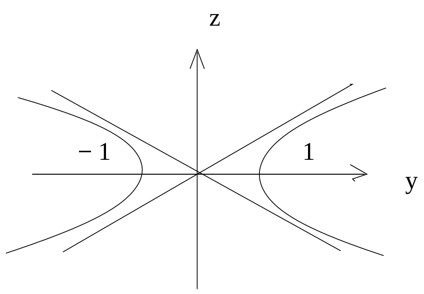

Figure 3: Traço de S_1 em $x = 0$: Hipérbole $y^2 - z^2/4 = 1$.

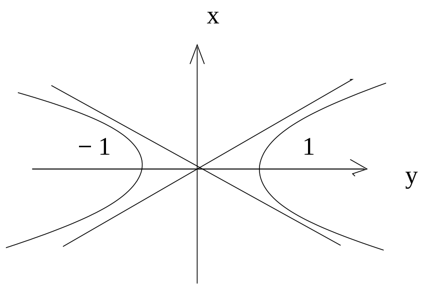

Figure 4: Traço de S_2 em $z = 0$: Hipérbole $4y^2 - 2x^2 = 4$.