Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Prova Final Unificada de Cálculo II - Engenharia/Escola de Química
01/12/2010 - PROVA MODELO 1

1^a **Questão:** (3 pontos)

Considere a equação $y'' + \dfrac{1}{x}\, y' = \ln x,\ x > 0.$

1. Faça a substituíção $z(x) = y'(x)$ e obtenha uma nova equação diferencial de ordem 1.
2. Resolva a equação diferencial obtida no item anterior.
3. Agora obtenha a solução da equação diferencial de segunda ordem dada na questão, com as condições iniciais $y(1) = 0$ e $y'(1) = 0$.

Solução:

1. A nova equação de ordem 1 é $z' + \dfrac{1}{x} z = \ln x$.
2. Como a equação é linear, podemos resolve-la pelo método do fator integrante, que é $e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x$.
   Temos que $(xz)' = x \ln x$ e $xz = \displaystyle\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$
   Logo: $z = \dfrac{x}{2} \ln x - \dfrac{x}{4} + \dfrac{C}{x}.$
3. Como $y' = z$, $y = \displaystyle\int \left(\frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x} \right) dx = \frac{x^2 \ln x}{4} - \frac{x^2}{4} + C \ln x + D.$
   $0 = y'(1) = z(1) = -\frac{1}{4} + C$ e portanto $C = 1/4$.
   $0 = y(1) = z(1) = -\frac{1}{4} + D$ e portanto $D = 1/4$.
   Assim: $y = \dfrac{x^2 \ln x}{4} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\ln x}{4} + \dfrac{1}{4}.$

3^a **Questão:** (3 pontos)

Sejam $F(x, y, z)$ e $g(x, y)$ funções diferenciáveis tais que, para todo (x, y) no domínio de $g(x, y)$,

$$F(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Suponha que: $g(1, 1) = 3$, $F_x(1, 1, 3) = 2$, $F_y(1, 1, 3) = -1$ e $F_z(1, 1, 3) = 5$.

Em cada item, assinale a alternativa correta.

Item 1. Dentre os vetores $\vec{v}$ abaixo, qual nos dá $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{v}}(1, 1, 3) = 1$?
(A) $\vec{v} = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$, (B) $\vec{v} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$, (C) $\vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$, (D) $\vec{v} = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$, (E) $\vec{v} = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$.

Item 2. As derivadas parciais $g_x(1, 1)$ e $g_y(1, 1)$ são respectivamente:

(A) $-2/5$ e $1/5$, (B) $1/5$ e $-2/5$, (C) 1 e 2, (D) -2 e -1, (E) 0 e 0.

Item 3. A reta tangente à curva de nível de $g(x, y)$ em $(1, 1)$ passa pelo ponto:
(A) $(0, 0)$, (B) $(2, -1)$, (C) $(1, 2)$, (D) $(0, -1)$, (E) $(1, 0)$.

Solução:

Item 1. Como $1 = \dfrac{\partial F}{\partial \vec{v}}(1, 1, 3) = \nabla F \bullet \vec{v}$, dentre a opções o vetor é $\vec{v} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$.

Item 2. Derivando a equação $F(x, y, g(x, y)) = 0$, com relação a x e y, respectivamente, quando $x = y = 1$, obtemos:

$$F_x(1, 1, 3)1 + F_z(1, 1, 3)\ g_x(1, 1) = 0$$

e

$$F_y(1, 1, 3)1 + F_z(1, 1, 3)\ g_y(1, 1) = 0.$$

Logo: $g_x(1, 1) = -2/5$ e $g_y(1, 1) = 1/5$.

Item 3. A equação da reta pode ser escrita como:

$$g_x(1, 1)(x - 1) + g_y(1, 1)(y - 1) = 0.$$

Substituindo os valores encontrados no item anterior, chegamos a equação $y - 2x = -1$. Logo, a reta tangente passa pelo ponto $(0, -1)$.

4^a **Questão:** (4 pontos)

Considere as superfícies S_1 e S_2 de equações $x^2 + 4y^2 = 4$ e $z - \sqrt{3}y = 0$, respectivamente. Seja C a curva interseção das superfícies S_1 e S_2.
Em cada item, assinale a alternativa correta.

Item 1. O comprimento da curva C é:
(A) 2π (C) $\sqrt{3}\pi$ (E) $(\sqrt{3} + 4)\pi$
(B) 4π (D) 8π

Item 2. Os pontos da curva C nos quais a retas tangentes são paralelas ao eixo x são:
(A) (2,0,0) e (-2,0,0) (D) $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$
(B) $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ (E) (1,0,0) e (-1,0,0)
(C) $(0,1,\sqrt{3})$ e $(0,-1,-\sqrt{3})$

Item 3. Dentre os vetores abaixo, qual é normal à curva C no ponto $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$:
(A) $(-4,1,-\sqrt{3})$ (C) (0,1,0) (E) $(2,1,-\frac{1}{6})$
(B) (-2,1,1) (D) $(0, -\sqrt{3}, 1)$

Item 4. Seja $f(x, y, z) = x + y + \sqrt{3}z$. O valor máximo de f sobre a curva C é:
(A) $12/\sqrt{5}$ (C) $(10 + 8\sqrt{3})/\sqrt{5}$ (E)$34/\sqrt{5}$
(B) $10/\sqrt{5}$ (D) $(8\sqrt{3} - 10)/\sqrt{5}$

Solução:

Item 1. Parametrização: $\sigma(t) = (2\cos(t), \text{sen}(t), \sqrt{3}\text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Vetor velocidade $\sigma'(t) = (-2\text{sen}(t), \cos(t), \sqrt{3}\cos(t))$.
Comprimento da curva: $L(C) = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4}\, dt = 4\pi$.

Item 2.
Resolução 1:
$\sigma'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0, 0) \Longrightarrow \sigma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \sqrt{3})$,
$\sigma'(\frac{3\pi}{2}) = (2, 0, 0) \Longrightarrow \sigma(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, -\sqrt{3})$

Resolução 2:
$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 \Longrightarrow \nabla g(x, y, z) = (2x, 8y, 0)$,
$h(x, y, z) = z - \sqrt{3}y \Longrightarrow \nabla h(x, y, z) = (0, -\sqrt{3}, 1)$.
Vetor tangente a C: $\nabla g \times \nabla h = (\sqrt{3}, -2x, -2\sqrt{3}x)$.
Condição de paralelismo: $\nabla g \times \nabla h = (\sqrt{3}, -2x, -2\sqrt{3}x) = \lambda(1, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Resolvendo o sistema, temos: $\lambda = \sqrt{3}$, $x = 0$ e $y = \pm 1$. Logo, os pontos são: $(0, 1, \sqrt{3})$ e $(0, -1, -\sqrt{3})$.

Item 3. Repare que $\sigma(t) = (2\cos(t), \text{sen}(t), \sqrt{3}\text{sen}(t)) = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quando $t = \frac{\pi}{6}$. O Vetor tangente a C em $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\mathbf{u} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. O único vetor, nas opções, que é perpendicular ao vetor $\mathbf{u}$ é o $(0, -\sqrt{3}, 1)$.

Item 4. Como $\nabla g \times \nabla h \neq \mathbf{0}$ em C (curva fechada), os pontos de máximo e mínimo de f sobre C satisfazem a condição: $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x && (1)\\ 1 &= 8\lambda y - \sqrt{3}\mu && (2)\\ \sqrt{3} &= \mu && (3)\\ x^2 + 4y^2 &= 4 && (4)\\ z - \sqrt{3}y &= 0 && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

De (1),(2) e (3), temos que $\lambda \neq 0$ e $x = y$.
Substituindo em (4), obtemos $y = \pm 2/\sqrt{5}$. Assim, obtemos os pontos:
$P_0 = \left(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 2\sqrt{3}/\sqrt{5}\right)$ e $P_1 = \left(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, -2\sqrt{3}/\sqrt{5}\right)$. Assim, o valor máximo de f é $f(P_0) = 10/\sqrt{5}$.