Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da 2^a Prova Unificada de Cálculo II - Engenharia/Escola de Química
24/11/2010

1^a **Questão:** (2,5 pontos)

1. Faça um esboço do gráfico da função

$$f(x,y) = \begin{cases} 12 - x^2 - y^2 & \text{, se } x^2 + y^2 \geq 9, \\ 2 + \sqrt{x^2 + y^2} & \text{, se } x^2 + y^2 < 9. \end{cases}$$

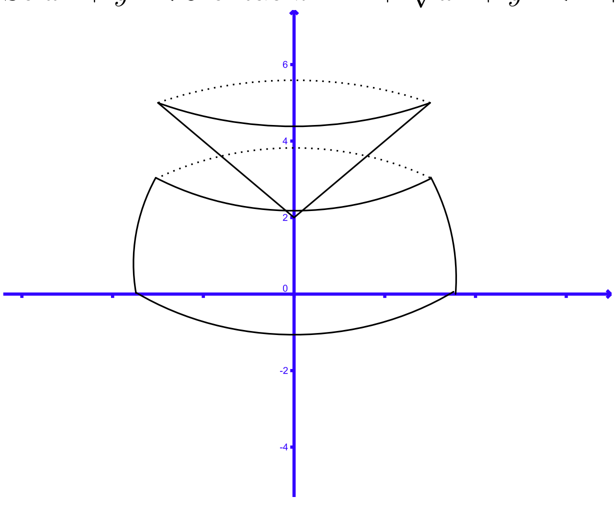
2. Verifique onde a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|\cos(y)}{|y| + x^4} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é contínua.

Solução:

1. A superfície $z = 12 - x^2 - y^2$ é uma parte de um paraboloide de revolução voltado para baixo, com vértice no ponto $(0, 0, 12)$.
Se $x^2 + y^2 \geq 9$ então $z = 12 - x^2 - y^2 \leq 12 - 9 = 3$.
A superfície $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ é uma parte da metade superior de um cone de revolução, com vértice no ponto $(0, 0, 2)$.
Se $x^2 + y^2 < 9$ então $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2} < 2 + 3 = 5$.



2. Como a expressão $\frac{|xy|\cos(y)}{|y|+x^4}$ é o quociente de duas funções contínuas, ela é contínua em seu domínio e portanto f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para verificar a continuidade na origem, note que $f(x,0) = 0$ para todo x e, se $y \neq 0$,

$$\frac{|xy|\cos(y)}{|y| + x^4} = \frac{|x|\cos(y)}{1 + x^4/|y|}.$$

Consequentemente,

$$0 \leq \frac{|xy\cos(y)|}{|y| + x^4} \leq |x\cos(y)| \to 0$$

quando $(x,y) \to (0,0)$, visto que a função cosseno é limitada. Segue daí que f é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

2^a **Questão:** (3,5 pontos)

Seja $f(x,y) = ax^2 + 3xy + y^2$, onde $a \neq 9/4$.

1. Determine o ponto crítico de f.
2. Determine, se possível, os valores de a, de modo que o ponto crítico de f seja:
   (a) ponto de máximo local;
   (b) ponto de mínimo local;
   (c) ponto de sela.
3. Se $a = 9/4$, o que se pode dizer sobre o ponto crítico de f encontrado em 1.?
4. Ache os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x,y) = \dfrac{9x^2}{4} + 3xy + y^2$, no conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 9x^2 + 4y^2 = 4\}.$$

Solução:

1. $f_x = 2ax + 3y$ e $f_y = 3x + 2y$. Temos que $f_x = f_y = 0$ se e somente se $(x,y) = (0,0)$. O ponto crítico é $(0,0)$.
2. $f_{xx} = 2a$, $f_{xy} = f_{yx} = 3$, $f_{yy} = 2$ e $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4a - 9$. Assim:
   (a) O ponto de máximo local acontece se $a > 9/4$ e $a < 0$. Impossível!
   (b) O ponto de mínimo local acontece se $a > 9/4$ e $a > 0$, isto é quando $a > 9/4$.
   (c) ponto de sela acontece se $a < 9/4$.
3. Neste caso $f(x,y) = \dfrac{9x^2}{4} + 3xy + y^2 = (\dfrac{3x}{2} + y)^2 \geq 0$ e $f(0,0) = 0$. Logo o ponto crítico é ponto de mínimo local e mínimo absoluto.
4. Seja $g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 = 4$. Repare que $\nabla g = (18x, 8y) = (0,0)$ se e somente se $(x,y) = (0,0) \notin C$. Pelo método de multiplicadores de Lagrange, $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x,y) = 4$. Resolvendo o sistema de equações, encontramos quatro pontos: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$. Então o máximo absoluto será $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 2$ e o mínimo absoluto será $f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

3^a **Questão:** (4 pontos)

Sabendo-se, que $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de uma função diferenciável $f(x,y)$ no ponto $P = (1,1,1)$, escolha em cada item a alternativa correta.

Item 1 As derivadas parciais $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$ são respectivamente:

(A) -2 e -1 (B) 2 e 1 (C) $2/3$ e $1/3$ (D) $-2/3$ e $-1/3$ (E) -1 e $-1/3$

Item 2 Dentre os pontos abaixo, qual pertence à reta normal ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto P ?

(A) (10,4,10) (B) (5,3,7) (C) $(-3,1/3,2)$ (D) (0,0,0) (E) (5,3,3)

Item 3 Dentre os vetores abaixo, qual nos dá $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)=0$?

(A) $\mathbf{v}=(1/\sqrt{5},-2/\sqrt{5})$ (B) $\mathbf{v}=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ (C) $\mathbf{v}=(1/\sqrt{10},-3/\sqrt{10})$
(D) $\mathbf{v}$=(1/3,1/3) (E) $\mathbf{v}$=(1,0)

Item 4 Qual dentre as equações abaixo, representa uma superfície tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto P ?

(A) $xy+xz=2$ (B) $x^2+y^2+z^3=3$ (C) $x^2yz=1$
(D) $xy+xz+yz=3$ (E) $x^2yz^3=1$

Item 5 Seja $G(u,v)=f(h(u,v),q(u,v))$, onde

	f	f_x	f_y	h	h_u	h_v	q	q_u	q_v
(1,2)	2	1	3	5	2	2	-4	10	-2
(-1,-3)	-2	-2	1/5	1	2/5	$-1/3$	2	3/5	5/3

As derivadas parciais $G_u(-1,-3)$ e $G_v(-1,-3)$ são respectivamente:

(A) -32 e -4 (B) $-9/25$ e $7/3$ (C) $11/5$ e $14/3$
(D) $-17/25$ e 1 (E) 1 e $-11/3$

Solução:
Item 1: Podemos escrever a equação do plano como $z=1-\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{3}(y-1)$. Assim, $f_x(1,1)=-\frac{2}{3}$ e $f_y(1,1)=-\frac{1}{3}$. Resposta certa: (D).

Item 2: Podemos escrever a equação paramétrica da reta normal como $r(t)=(1+2t,1+t,1+3t), t\in\mathbb{R}$. O único ponto que está na reta normal é $(5,3,7)=r(2)$. Resposta certa: (B).

Item 3: $\nabla f(1,1)=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. Para que $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)=0$ temos que ter $\nabla f(1,1)\bullet\mathbf{v}=0 \Longrightarrow 2v_1+v_2=0$. Resposta certa: (A).

Item 4: A única superfície cujo vetor normal em P está alinhado com o vetor normal ao gráfico de f em P é a do item (E).

Item 5:
$G_u(-1,-3)=f_x(1,2)h_u(-1,-3)+f_y(1,2)q_u(-1,-3)=1\cdot\dfrac{2}{5}+3\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{11}{5}$

$G_v(-1,-3)=f_x(1,2)h_v(-1,-3)+f_y(1,2)q_v(-1,-3)=1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)+3\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{14}{3}$

Resposta certa: (C).